

$$D \frac{d^2 c(x)}{dx^2} - V \frac{dc(x)}{dx} - kc(x) = 0$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΓΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \beta^4 X(x) = 0$$

Τεύχος 2

Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks ΙΙ
για Πολιτικούς Μηχανικούς

$$\theta(x) = v'(x)$$

$$\kappa(x) = \theta'(x)$$

$$M(x) = EI\kappa(x)$$

$$Q(x) = M'(x)$$

$$p(x) = Q'(x)$$

⇓

$$v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}$$



$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)$$

GOTSIS
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	v-vi
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ	vii-viii
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ix-x
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	1-74
A1. Άσκηση Μεταδόσεως Θερμότητας (Άσκηση A1)	1
A1.1. Ψύξη υλικού σημείου (Άσκηση A1)	1
A2. Ασκήσεις Περιβαλλοντικής Μηχανικής (Ασκήσεις A2 έως A8)	1
A2.1. Καθαρισμός νερού (Ασκήσεις A2 έως A5)	1
A2.2. Περιβαλλοντική υδραυλική (Ασκήσεις A6 έως A8)	2
A3. Ασκήσεις Ρευστομηχανικής (Ασκήσεις A9 έως A20)	3
A3.1. Εκροή ρευστού από οριζόντιο σωλήνα (Ασκήσεις A9 έως A10)	3
A3.2. Διδιάστατη ροή (Ασκήσεις A11 έως A20)	4
A4. Ασκήσεις Μηχανικής των Υλικών (Ασκήσεις A21 έως A71)	7
A4.1. Δοκοί με συνηθισμένη φόρτιση (Ασκήσεις A21 έως A29)	7
A4.2. Δοκοί με συγκεντρωμένα φορτία και ροπές, συναρτήσεις Macaulay (Ασκήσεις A30 έως A36)	10
A4.3. Δοκοί επί ελαστικής βάσεως, υπόθεση του Winkler (Ασκήσεις A37 έως A42)	13
A4.4. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός (Ασκήσεις A43 έως A59)	15
A4.5. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός υπό το ίδιο βάρος (Άσκηση A60)	21
A4.6. Δοκοί-στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός (Ασκήσεις A61 έως A70)	22
A4.7. Επίπεδη ελαστικότητα με κυκλική συμμετρία, τασική συνάρτηση του Airy (Άσκηση A71)	26
A5. Ασκήσεις Πλακών (Ασκήσεις A72 έως A80)	27
A5.1. Πλάκες με κυκλική συμμετρία (Ασκήσεις A72 έως A76)	27
A5.2. Λυγισμός πλακών με κυκλική συμμετρία (Άσκηση A77)	29
A5.3. Ταλαντώσεις πλακών με κυκλική συμμετρία (Άσκηση A78)	29
A5.4. Επιμήκεις πλάκες, πλακοταινίες (Άσκηση A79)	30
A5.5. Ορθογωνικές πλάκες (Άσκηση A80)	30
A6. Ασκήσεις Δυναμικής (Ασκήσεις A81 έως A112)	31
A6.1. Εξαναγκασμένη ευθύγραμμη κίνηση (Ασκήσεις A81 έως A82)	31
A6.2. Ευθύγραμμη κίνηση με αντίσταση (Ασκήσεις A83 έως A89)	31
A6.3. Κατακόρυφη κίνηση με αντίσταση (Ασκήσεις A90 έως A99)	33
A6.4. Κίνηση σε περιστρεφόμενο σωλήνα (Ασκήσεις A100 έως A111)	36
A6.5. Περιστροφή κυκλικού δίσκου (Άσκηση A112)	39
A7. Ασκήσεις ταλαντώσεων (Ασκήσεις A113 έως A173)	40
A7.1. Ταλαντώσεις μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων (Ασκήσεις A113 έως A160)	40
A7.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση: συντονισμός (Ασκήσεις A161 έως A166)	53
A7.3. Ενεργειακή θεώρηση των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση (Ασκήσεις A167 έως A170)	55
A7.4. Ελεύθερες ταλαντώσεις διβάθμιων μηχανικών συστημάτων (Ασκήσεις A171 έως A173)	57

A8. Ασκήσεις Δυναμικής των Κατασκευών (Ασκήσεις A174 έως A222)	59
A8.1. Δοκοί (Ασκήσεις A174 έως A179)	59
A8.2. Υδατόπυργοι (Ασκήσεις A180 έως A182)	61
A8.3. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: φόρτιση ανέμου (Άσκηση A183)	62
A8.4. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: σεισμική φόρτιση (Ασκήσεις A184 έως A187)	63
A8.5. Διώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως (Ασκήσεις A188 έως A217)	64
A8.6. Πολυώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως (Ασκήσεις A218 έως A222)	73
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ II:	
ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ	75-132
Ομάδα EMII-A (Ασκήσεις EMII-A1 έως EMII-A8)	75
Ομάδα EMII-B (Ασκήσεις EMII-B1 έως EMII-B5)	77
Ομάδα EMII-C (Ασκήσεις EMII-C1 έως EMII-C4)	79
Ομάδα EMII-D (Ασκήσεις EMII-D1 έως EMII-D5)	83
Ομάδα EMII-E (Ασκήσεις EMII-E1 έως EMII-E8)	86
Ομάδα EMII-F (Ασκήσεις EMII-F1 έως EMII-F9)	91
Ομάδα EMII-G (Ασκήσεις EMII-G1 έως EMII-G8)	96
Ομάδα EMII-H (Ασκήσεις EMII-H1 έως EMII-H4)	101
Ομάδα EMII-I (Ασκήσεις EMII-I1 έως EMII-I5)	105
Ομάδα EMII-J (Ασκήσεις EMII-J1 έως EMII-J5)	112
Ομάδα EMII-K (Ασκήσεις EMII-K1 έως EMII-K3)	121
Ομάδα EMII-L (Ασκήσεις EMII-L1 έως EMII-L5)	125
Ομάδα EMII-M (Ασκήσεις EMII-M1 έως EMII-M8)	130
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ II:	
ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ NOTEBOOKS	133-212
Ασκήσεις του Notebook EMII-MA (Ασκήσεις EMII-MA1 έως EMII-MA2)	134
Notebook EMII-MA (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MA1 έως EMII-MA2)	135
Ασκήσεις του Notebook EMII-MB (Ασκήσεις EMII-MB1 έως EMII-MB6)	140
Notebook EMII-MB (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MB1 έως EMII-MB6)	142
Ασκήσεις του Notebook EMII-MC (Ασκήσεις EMII-MC1 έως EMII-MC6)	147
Notebook EMII-MC (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MC1 έως EMII-MC6)	149
Ασκήσεις του Notebook EMII-MD (Ασκήσεις EMII-MD1 έως EMII-MD10)	157
Notebook EMII-MD (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MD1 έως EMII-MD10)	159
Ασκήσεις του Notebook EMII-ME (Ασκήσεις EMII-ME1 έως EMII-ME10)	167
Notebook EMII-ME (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-ME1 έως EMII-ME10)	169
Ασκήσεις του Notebook EMII-MF (Ασκήσεις EMII-MF1 έως EMII-MF7)	179
Notebook EMII-MF (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MF1 έως EMII-MF7)	182
Ασκήσεις του Notebook EMII-MG (Ασκήσεις EMII-MG1 έως EMII-MG7)	191
Notebook EMII-MG (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MG1 έως EMII-MG7)	193
Ασκήσεις του Notebook EMII-MH (Ασκήσεις EMII-MH1 έως EMII-MH9)	201
Notebook EMII-MH (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MH1 έως EMII-MH9)	203
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ	213-232
Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-NEWTON: Νόμος του Νεύτωνα	214
Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-FALL: Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου	219
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ	231-260
Notebook Animations-MassSpringVibrations: Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μηχανικού Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου	233
Notebook Animations-BuildingVibrations: Ταλαντώσεις Μονώροφου Κτιρίου	241

■ Notebook EMI-MH

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMI-MH

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMI-MH1 ΕΩΣ EMI-MH9)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MH1 (ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

```
In[2]:= ODE4 = EI v''''[x] == p[x];
```

```
In[3]:= comment = "Απαντάται στη Μηχανική των Υλικών στην κάμψη συνήθους  
δοκού υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος της δοκού.";
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε εξίσου αποδεκτή απάντηση αφορά και η αντίστοιχη εξίσωση για δοκό επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδιλοδοκό ή σιδηροτροχιά), όπου υπάρχει στο αριστερό μέλος επίσης και η αντίδραση του εδάφους $+k v(x)$.

```
In[4]:= BernoulliODE = m v'[t] == -b v[t] - c v[t]^2;
```

```
In[5]:= comment =  
"Απαντάται στη Δυναμική στην κίνηση υλικού σημείου με αντίσταση ανάλογη τόσο  
της ταχύτητας του υλικού σημείου (ένας όρος) όσο και του τετραγώνου της  
ταχύτητας του υλικού σημείου (δεύτερος όρος): δύο όροι στην αντίσταση";
```

```
In[6]:= sol = DSolve[BernoulliODE, v[t], t]
```

```
Out[6]= {{v(t) -> \frac{b e^{bc_1}}{e^{\frac{bt}{m}} - c e^{bc_1}}}}
```

```
In[7]:= NonlinearSVODE1 = c'[t] == -k c[t]^2;
```

```
In[8]:= comment = "Απαντάται στην Περιβαλλοντική Μηχανική στην αποδόμηση ρύπου  
δευτέρας τάξεως μέσα σε δοχείο με ομοιόμορφη κατανομή του ρύπου.";
```

```
In[9]:= NonlinearSVODE2 = L v'[t] + v[t]^2 / 2 == g h;
```

```
In[10]:= comment = "Απαντάται στη Ρευστομηχανική στο πρόβλημα του  
προσδιορισμού της ταχύτητας εκροής ρευστού στο άκρο σωλήνα στο  
κάτω μέρος δοχείου με σταθερή στάθμη του ρευστού στο δοχείο.";
```

```
In[11]:= NonlinearSVODE3 = m v'[t] + c v[t]^2 == m g;
```

```
In[12]:= comment = "Απαντάται στη Δυναμική στην πτώση υλικού σημείου στο γήινο πεδίο  
βαρύτητας με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του.";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MH2 (ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

```
In[13]:= ode1 = r''[t] - ω^2 r[t] == 0;
```

```
In[14]:= comment =
      "Απαντάται στη Δυναμική στην κίνηση υλικού σημείου μέσα σε ημιάπειρο σωλήνα
      που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άκρο του με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ ."
```

```
In[15]:= chareq1 =  $\mu^2 - \omega^2 == 0$ ;
```

```
In[16]:= sol1 = Solve[chareq1,  $\mu$ ]
```

```
Out[16]= {{ $\mu \rightarrow -\omega$ }, { $\mu \rightarrow \omega$ }}
```

```
In[17]:= roots1 = { $-\omega, \omega$ };
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε εξίσου αποδεκτή απάντηση αφορά και η διαφορική εξίσωση $w''(z) = \eta^2 w(z)$. Αυτή απαντάται στις Θεμελιώσεις στην αξονική φόρτιση κυλινδρικού πασσάλου στο έδαφος και έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\mu^2 = \eta^2$ με δύο πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες $\mu_1 = -\eta$ και $\mu_2 = \eta$.

```
In[18]:= ode2 = u''[t] +  $\omega_0^2$  u[t] == 0;
```

```
In[19]:= comment = "Απαντάται στις Ταλαντώσεις στις ελεύθερες ταλαντώσεις υλικού
      σημείου σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου χωρίς απόσβεση.";
```

```
In[20]:= chareq2 =  $\mu^2 + \omega_0^2 == 0$ ;
```

```
In[21]:= sol2 = Solve[chareq2,  $\mu$ ]
```

```
Out[21]= {{ $\mu \rightarrow -i \omega_0$ }, { $\mu \rightarrow i \omega_0$ }}
```

```
In[22]:= roots2 = { $i \omega_0, -i \omega_0$ };
```

```
In[23]:= ode3 = u''[t] + 2  $\xi \omega_0$  u'[t] +  $\omega_0^2$  u[t] == 0;
```

```
In[24]:= comment = "Απαντάται στις Ταλαντώσεις στις ελεύθερες ταλαντώσεις
      υλικού σημείου σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-
      αποσβεστήρα με ασθενή απόσβεση:  $\xi < 1$ . (Ο περιορισμός αυτός,
       $\xi < 1$ , υποτίθεται ότι ισχύει και στις τρεις παρακάτω εντολές.);"
```

```
In[25]:= chareq3 =  $\mu^2 + 2 \xi \omega_0 \mu + \omega_0^2 == 0$ ;
```

```
In[26]:= sol3 = Solve[chareq3,  $\mu$ ]
```

```
Out[26]= {{ $\mu \rightarrow -\xi \omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0$ }, { $\mu \rightarrow \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 - \xi \omega_0$ }}
```

```
In[27]:= roots3 = {(- $\xi + i \text{Sqrt}[1 - \xi^2]$ )  $\omega_0, (-\xi - i \text{Sqrt}[1 - \xi^2]$ )  $\omega_0$ };
```

```
In[28]:= ode4 = v''''[x] +  $k^2$  v''[x] == 0;
```

```
In[29]:= comment = "Απαντάται στη Μηχανική των Υλικών και στην Ελαστική Ευστάθεια
      στο πρόβλημα του λυγισμού στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος).";
```

```
In[30]:= chareq4 =  $\mu^4 + k^2 \mu^2 == 0$ ;
```

```
In[31]:= sol4 = Solve[chareq4,  $\mu$ ]
```

```
Out[31]= {{ $\mu \rightarrow 0$ }, { $\mu \rightarrow 0$ }, { $\mu \rightarrow -i k$ }, { $\mu \rightarrow i k$ }}
```

```
In[32]:= roots4 = {0, 0,  $i k, -i k$ };
```

```
In[33]:= EulerODE =  $r^4$  w''''[r] + 2  $r^3$  w''''[r] -  $r^2$  w''[r] +  $r$  w'[r] == (p0 / D)  $r^4$ ;
```

```
In[34]:= comment = "Απαντάται στις Πλάκες σε
κυκλική πλάκα υπό σταθερή κατανεμημένη φόρτιση p_0 .";
```

```
In[35]:= sol = DSolve[EulerODE, w[r], r]
```

```
Out[35]= {{w(r) -> \frac{p_0 r^4}{64 D} + \frac{1}{4} (2 c_2 - c_3) r^2 + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r)}}
```

```
In[36]:= solhlist = {1, r^2, Log[r], r^2 Log[r]}
```

```
Out[36]= {1, r^2, log(r), r^2 log(r)}
```

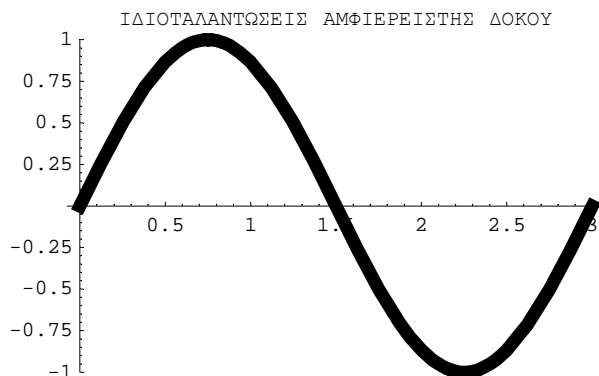
```
In[37]:= W = Det[{solhlist, D[solhlist, r], D[solhlist, {r, 2}], D[solhlist, {r, 3}]]]
```

```
Out[37]= -\frac{16}{r^2}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-ΜΗ3 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ, ANIMATIONS)

```
In[38]:= Table[X[n_, x_] := Sin[n π x / 3], {n, 1, 6}];
```

```
In[39]:= SimplySupportedBeamVibrations = Table[Plot[X[2, x] Cos[2 t],
{x, 0, 3}, PlotStyle -> Thickness[0.025], PlotRange -> {-1, 1},
PlotLabel -> "ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ"], {t, 0, π - π / 16, π / 16}]
```



```
Out[39]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-}
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παραπάνω για οικονομία χώρου παραλείφθηκαν όλα τα σχήματα της animation εκτός από το πρώτο.

```
In[40]:= Export["D:\CEII\SimplySupportedBeamVibrations.gif",
SimplySupportedBeamVibrations, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[40]= D:\CEII\SimplySupportedBeamVibrations.gif
```

```
In[41]:= comment =
"Το κινούμενο σχήμα (η animation) ενεργοποιείται μέσα στη Mathematica είτε
απο τις επιλογές (τα menus) με Cell -> Animate Selected Graphics είτε
πιο απλά από το πληκτρολόγιο με Ctrl Y. Επ' ευκαιρία σημειώνεται
επίσης ότι το σταμάτημα της animation γίνεται με πάτημα του
ποντικιού έξω από την animation ή καλύτερα με δεύτερο Ctrl Y.";
```

```
In[42]:= comment =
  "Έξω από τη Mathematica το αρχείο animated gif που δημιουργήθηκε καλείται
  απλά με διπλό κτύπημα με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού πάνω στο
  εικονίδιό του. Όμως μερικές φορές χρειάζεται να δηλωθεί ρητά και το
  πρόγραμμα των Windows που θα ανοίξει αυτό το αρχείο animated gif.
  Για το σκοπό αυτό πατιέται το εικονίδιο του αρχείου με πάτημα του
  δεξιού πλήκτρου του ποντικιού και στη συνέχεια από το παράθυρο που
  εμφανίζεται η επιλογή Open With και τέλος Windows Picture and Fax Viewer.
  Τότε παρουσιάζεται πραγματικά η animation (το κινούμενο σχήμα).";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH4 (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE)

```
In[43]:= LT1 = LaplaceTransform[1, t, s] == 1 / s
```

```
Out[43]= True
```

```
In[44]:= LT2 = LaplaceTransform[t^3, t, s] == 3! / s^4
```

```
Out[44]= True
```

```
In[45]:= LT3 = LaplaceTransform[t Sin[ω t], t, s] == 2 ω s / (s^2 + ω^2)^2
```

```
Out[45]= True
```

```
In[46]:= LT4 = LaplaceTransform[Sin[b t] Sinh[b t], t, s] == 2 b^2 s / (s^4 + 4 b^4)
```

```
Out[46]= True
```

```
In[47]:= LT5 = LaplaceTransform[Erfc[a / Sqrt[t]], t, s] == (1 / s) e^-2 a Sqrt[s]
```

```
Out[47]= True
```

```
In[48]:= LT6 = LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s] == 1 / s
```

```
Out[48]= True
```

```
In[49]:= LT7 = LaplaceTransform[DiracDelta[t], t, s] == 1
```

```
Out[49]= True
```

```
In[50]:= ILT1 = InverseLaplaceTransform[1 / s, s, t] == 1
```

```
Out[50]= True
```

```
In[51]:= ILT2 = InverseLaplaceTransform[1 / (s^2 - b^2), s, t] == (1 / b) Sinh[b t] // Simplify
```

```
Out[51]= True
```

```
In[52]:= ILT3 = InverseLaplaceTransform[1 / (s^2 + b^2), s, t] == (1 / b) Sin[b t]
```

```
Out[52]= True
```

```
In[53]:= ILT4 = InverseLaplaceTransform[1 / ((s + a)^2 + b^2), s, t] == (1 / b) e^-a t Sin[b t]
```

```
Out[53]= True
```

```
In[54]:= ILT5 = InverseLaplaceTransform[1, s, t] == DiracDelta[t]
```

```
Out[54]= True
```

```
In[55]:= ILT6 = InverseLaplaceTransform[s / (s^4 - b^4), s, t] ==
          (1 / (2 b^2)) (Cosh[b t] - Cos[b t]) // Simplify
```

```
Out[55]= True
```

```
In[56]:= ILT7 = InverseLaplaceTransform[s^3 / (s^4 + b^4), s, t] ==
          Cosh[b t / Sqrt[2]] Cos[b t / Sqrt[2]] // Simplify
```

```
Out[56]= True
```

```
In[57]:= comment = "Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ILT6 είναι
                    χρήσιμος στη Δυναμική των Κατασκευών σε προβλήματα καμπτικών
                    ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων γενικότερα συνήθων δοκών.";
```

```
In[58]:= comment = "Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ILT7 είναι χρήσιμος στη
                    Μηχανική των Υλικών σε προβλήματα κάμψεως δοκών επί ελαστικής βάσεως,
                    π.χ. πεδιλοδοκών στις Θεμελιώσεις ή σιδηροτροχιών στη Σιδηροδρομική.";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH5 (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MACAULAY)

```
In[59]:= comment = "Οι συναρτήσεις Macaulay καλούνται και συναρτήσεις ιδιομορφίας,
                    επειδή είτε οι ίδιες είτε παράγωγοί τους παρουσιάζουν ιδιομορφίες
                    στο σημείο x = 0. Με τον τρόπο αυτό είναι κατάλληλες και για
                    την παράσταση ιδιόμορφων φορτίσεων, όπως είναι οι ροπές, τα
                    συγκεντρωμένα φορτία και οι ασυνέχειες σε κατανεμημένες φορτίσεις.";
```

```
In[60]:= Macaulay[0, x_] = UnitStep[x];
```

```
In[61]:= Macaulay[-1, x_] = DiracDelta[x];
```

```
In[62]:= p[x_] = p0 (Macaulay[0, x - 1] - Macaulay[0, x - 2]) +
          P1 Macaulay[-1, x - 3] + P2 Macaulay[-1, x - 4];
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το σύμβολο $\theta(x)$ δηλώνει στις εξόδους τη βηματική συνάρτηση του Heavide $H(x)$.

```
In[63]:= BeamDE = EI v''''[x] == p[x]
```

```
Out[63]= EI v^(4)(x) == P2 δ(x - 4) + P1 δ(x - 3) + p0 (θ(x - 1) - θ(x - 2))
```

```
In[64]:= ics = {v[0] = v0, v'[0] = θ0, v''[0] = M0 / EI, v'''[0] = Q0 / EI};
```

```
In[65]:= LT1BeamDE = LaplaceTransform[BeamDE, x, s]
```

```
Out[65]= EI (LaplaceTransform[v(x), x, s] s^4 - v0 s^3 - θ0 s^2 -
            - \frac{M0 s}{EI} - \frac{Q0}{EI}) ==
            - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s} + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2
```

```
In[66]:= LT2BeamDE = LT1BeamDE /. LaplaceTransform[v[x], x, s] -> V[s]
```

```
Out[66]= EI (V(s) s^4 - v0 s^3 - θ0 s^2 - \frac{M0 s}{EI} - \frac{Q0}{EI}) ==
            - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s} + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2
```

```
In[67]:= sol = Solve[LT2BeamDE, V[s]]
```

```
Out[67]= {{V(s) -> \frac{EI v0 s^3 + EI θ0 s^2 + M0 s + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2 + Q0 - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s}}{EI s^4}}
```



```
In[68]:= vs[x_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, x]
```

$$\text{Out[68]} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24} p_0 \theta(x-2)(x-2)^4 + \frac{Q_0 x^3}{6} + \frac{M_0 x^2}{2} + EI v_0 + \right. \\ \left. EI x \theta_0 + \frac{1}{6} P_2 (x-4)^3 \theta(x-4) + \frac{1}{6} P_1 (x-3)^3 \theta(x-3) + \frac{1}{24} p_0 (x-1)^4 \theta(x-1) \right)$$

```
In[69]:= ver = BeamDE /. v -> vs // FullSimplify
```

```
Out[69]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH6 (ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ)

```
In[70]:= ODE = u''[t] + ω0^2 u[t] == DiracDelta[t] / m;
```

```
In[71]:= ics = {u[0] = 0, u'[0] = 0};
```

```
In[72]:= LTODE = LaplaceTransform[ODE, t, s] // Simplify
```

$$\text{Out[72]} = (s^2 + \omega_0^2) \text{LaplaceTransform}[u(t), t, s] == \frac{1}{m}$$

```
In[73]:= G[s_] = Solve[LTODE, LaplaceTransform[u[t], t, s]][[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out[73]} = \frac{1}{m(s^2 + \omega_0^2)}$$

```
In[74]:= g[t_] = InverseLaplaceTransform[G[s], s, t]
```

$$\text{Out[74]} = \frac{\sin(t \omega_0)}{m \omega_0}$$

```
In[75]:= g1[t_] = (1 / (m ω0)) Sin[ω0 t];
```

```
In[76]:= comment = "Ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί συνήθως, σχεδόν πάντα  
το σύμβολο H(s) αντί για το G(s) για τη συνάρτηση μεταφοράς.";
```

```
In[77]:= comment = "Αυτό δεν έγινε εδώ και γενικότερα δε γίνεται στα  
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ καθώς επίσης και σε μερικά βιβλία  
Ταλαντώσεων για να μην υπάρξει σύγχυση της συναρτήσεως μεταφοράς  
G(s) με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside H(x)";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH7 (ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ)

```
In[78]:= Clear[p]
```

```
In[79]:= g1[t_] = (1 / (m ω0)) Sin[ω0 t]
```

$$\text{Out[79]} = \frac{\sin(t \omega_0)}{m \omega_0}$$

```
In[80]:= u1a[t_] = Integrate[g1[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]
```

$$\text{Out[80]} = \frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t-\tau) \omega_0) d\tau}{m \omega_0}$$

```

In[81]:= u1b[t_] = u0 Cos[ω0 t] + (v0 / ω0) Sin[ω0 t]

Out[81]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 

In[82]:= u1c[t_] = u1b[t] + u1a[t]

Out[82]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t - \tau) \omega 0) d\tau}{m \omega 0}$  +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 

In[83]:= u1d[t_] = u1c[t] /. p[τ] → p0 // Simplify

Out[83]=  $\frac{p0 + (m u0 \omega 0^2 - p0) \cos(t \omega 0) + m v0 \omega 0 \sin(t \omega 0)}{m \omega 0^2}$ 

In[84]:= comment = "Εδώ χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο τ αντί για το t, γιατί τ
είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης στο πιο πάνω ολοκλήρωμα Duhamel.
Το t είναι το πάνω όριο ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα αυτό";

In[85]:= g2[t_] = (1 / (m ωD)) e-ξ ω0 t Sin[ωD t]

Out[85]=  $\frac{e^{-t \xi \omega 0} \sin(t \omega D)}{m \omega D}$ 

In[86]:= u2[t_] = Integrate[g2[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]

Out[86]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega 0} p(\tau) \sin((t-\tau)\omega D) d\tau}{m \omega D}$ 

In[87]:= g3[t_] = (1 / (m aD)) e-ξ ω0 t Sinh[aD t]

Out[87]=  $\frac{e^{-t \xi \omega 0} \sinh(a D t)}{a D m}$ 

In[88]:= u3[t_] = Integrate[g3[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]

Out[88]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega 0} p(\tau) \sinh(a D (t-\tau)) d\tau}{a D m}$ 

In[89]:= comment = "Η ασθενής απόσβεση (με ξ < 1) καλείται και υποκρίσιμη απόσβεση.";

In[90]:= comment = "Η ισχυρή απόσβεση (με ξ > 1) καλείται και υπερκρίσιμη απόσβεση.";

In[91]:= comment = "Η απόσβεση, όταν ξ = 1, καλείται κρίσιμη απόσβεση.";

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH8 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ)

```

In[92]:= Clear[u1, u2, u3]

In[93]:= M = DiagonalMatrix[{m1, m2, m3}];

In[94]:= M // MatrixForm

Out[94]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{pmatrix}$$


```

```
In[95]:= comment = "Στη Δυναμική των Κατασκευών το μητρώο μάζας M καλείται
μερικές φορές, όχι όμως και πολύ συχνά, και μητρώο αδρανεΐας.
Αυτή η δεύτερη ονομασία δόθηκε στο μητρώο μάζας M, επειδή αυτό
σχετίζεται με τις αδρανεΐακές δυνάμεις με βάση το νόμο του Νεύτωνα.";
```

```
In[96]:= K = {{k11, k12, k13}, {k12, k22, k23}, {k13, k23, k33}};
```

```
In[97]:= K // MatrixForm
```

```
Out[97]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$

```
In[98]:= ver = Transpose[K] == K
```

```
Out[98]= True
```

```
In[99]:= u[t_] = {u1[t], u2[t], u3[t]}; u[t] // MatrixForm
```

```
Out[99]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

```
In[100]:= p[t] = {p1[t], p2[t], p3[t]}; p[t] // MatrixForm
```

```
Out[100]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

```
In[101]:= sdeqs = M.u''[t] + K.u[t] == p[t]
```

```
Out[101]= {k11 u1(t) + k12 u2(t) + k13 u3(t) + m1 u1''(t), k12 u1(t) + k22 u2(t) + k23 u3(t) + m2 u2''(t),
k13 u1(t) + k23 u2(t) + k33 u3(t) + m3 u3''(t)} == {p1(t), p2(t), p3(t)}
```

```
In[102]:= FrequencyEquation1 = Det[-ω² M + K] == 0
```

```
Out[102]= -m1 m2 m3 ω⁶ + k33 m1 m2 ω⁴ + k22 m1 m3 ω⁴ + k11 m2 m3 ω⁴ +
k23² m1 ω² - k22 k33 m1 ω² + k13² m2 ω² - k11 k33 m2 ω² + k12² m3 ω² -
k11 k22 m3 ω² - k11 k23² - k13² k22 + 2 k12 k13 k23 - k12² k33 + k11 k22 k33 == 0
```

```
In[103]:= FrequencyEquation2 = Collect[FrequencyEquation1[[1]], ω] == 0
```

```
Out[103]= -m1 m2 m3 ω⁶ + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω⁴ +
(m3 k12² + k23² m1 - k22 k33 m1 + k13² m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω² -
k11 k23² - k13² k22 + 2 k12 k13 k23 - k12² k33 + k11 k22 k33 == 0
```

```
In[104]:= deq[1] = m1 u1''[t] + k11 u1[t] + k12 u2[t] + k13 u3[t] == p1[t];
```

```
In[105]:= deq[2] = m2 u2''[t] + k12 u1[t] + k22 u2[t] + k23 u3[t] == p2[t];
```

```
In[106]:= deq[3] = m3 u3''[t] + k13 u1[t] + k23 u2[t] + k33 u3[t] == p3[t];
```

```
In[107]:= subsu = {LaplaceTransform[u1[t], t, s] → U1[s],
LaplaceTransform[u2[t], t, s] → U2[s], LaplaceTransform[u3[t], t, s] → U3[s]};
```

```
In[108]:= subsp = {LaplaceTransform[p1[t], t, s] → P1[s],
LaplaceTransform[p2[t], t, s] → P2[s], LaplaceTransform[p3[t], t, s] → P3[s]};
```

In[109]:= **subsz** = {u1[0] → 0, u2[0] → 0, u3[0] → 0, u1'[0] → 0, u2'[0] → 0, u3'[0] → 0};

In[110]:= **LTdeqs** =
LaplaceTransform[{deq[1], deq[2], deq[3]}, t, s] /. **subsu** /. **subsp** /. **subsz** //
Simplify

Out[110]= {(m1 s² + k11) U1(s) + k12 U2(s) + k13 U3(s) == P1(s),
k12 U1(s) + (m2 s² + k22) U2(s) + k23 U3(s) == P2(s),
k13 U1(s) + k23 U2(s) + (m3 s² + k33) U3(s) == P3(s)}

In[111]:= **solLTdeqs** = **Solve**[**LTdeqs**, {U1[s], U2[s], U3[s]}] // **Simplify**

Out[111]= {{U1(s) → ((k23² - (m2 s² + k22) (m3 s² + k33)) P1(s) +
(k12 m3 s² - k13 k23 + k12 k33) P2(s) + (k13 m2 s² + k13 k22 - k12 k23) P3(s)) /
(-m1 m2 m3 s⁶ - k33 m1 m2 s⁴ - k22 m1 m3 s⁴ + k23² m1 s² - k22 k33 m1 s² + k12² m3 s² -
2 k12 k13 k23 + k12² k33 + k13² (m2 s² + k22) + k11 (k23² - (m2 s² + k22) (m3 s² + k33))),
U2(s) → ((k12 (m3 s² + k33) - k13 k23) P1(s) + (k13² - (m1 s² + k11) (m3 s² + k33)) P2(s) +
(k23 (m1 s² + k11) - k12 k13) P3(s)) /
(-m1 m2 m3 s⁶ - k33 m1 m2 s⁴ - k22 m1 m3 s⁴ + k23² m1 s² - k22 k33 m1 s² + k12² m3 s² -
2 k12 k13 k23 + k12² k33 + k13² (m2 s² + k22) + k11 (k23² - (m2 s² + k22) (m3 s² + k33))),
U3(s) → -((k13 (m2 s² + k22) - k12 k23) ((m1 s² + k11) P3(s) - k13 P1(s)) -
(k12 k13 - k23 (m1 s² + k11)) (k12 P3(s) - k13 P2(s))) /
((k12 k13 - k23 (m1 s² + k11)) (k12 (m3 s² + k33) - k13 k23) +
(k13 (m2 s² + k22) - k12 k23) (k13² - (m1 s² + k11) (m3 s² + k33)))}}

In[112]:= **LTdet** = **Collect**[**Det**[s² **M** + **K**], s] == 0

Out[112]= m1 m2 m3 s⁶ + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) s⁴ +
(-m3 k12² - k23² m1 + k22 k33 m1 - k13² m2 + k11 k33 m2 + k11 k22 m3) s² -
k11 k23² - k13² k22 + 2 k12 k13 k23 - k12² k33 + k11 k22 k33 == 0

In[113]:= **ZeroLoading** = {p1[t] = 0, p2[t] = 0, p3[t] = 0};

In[114]:= {u10[t_] = φ1 Cos[ω t + α], u20[t_] = φ2 Cos[ω t + α], u30[t_] = φ3 Cos[ω t + α]};

In[115]:= **algeqs1** = {deq[1], deq[2], deq[3]} /. {u1 → u10, u2 → u20, u3 → u30} // **Simplify**

Out[115]= {(-m1 φ1 ω² + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3) Cos(α + t ω) == 0,
(-m2 φ2 ω² + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3) Cos(α + t ω) == 0,
(k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω²)) Cos(α + t ω) == 0}

In[116]:= **algeqs2** = **algeqs1** /. **Cos**[ω t + α] → 1

Out[116]= {-m1 φ1 ω² + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 == 0,
-m2 φ2 ω² + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 == 0, k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω²) == 0}

In[117]:= **algeq[1]** = k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 - m1 φ1 ω² == 0

Out[117]= -m1 φ1 ω² + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 == 0

In[118]:= **algeq[2]** = k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 - m2 φ2 ω² == 0

Out[118]= -m2 φ2 ω² + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 == 0

In[119]:= **algeq[3]** = k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω²) == 0

Out[119]= k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω²) == 0

```
In[120]:= algdet = Collect[
  Det[{{k11 - m1 ω2, k12, k13}, {k12, k22 - m2 ω2, k23}, {k13, k23, k33 - m3 ω2}}, ω]
```

```
Out[120]= -m1 m2 m3 ω6 + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω4 +
  (m3 k122 + k232 m1 - k22 k33 m1 + k132 m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω2 -
  k11 k232 - k132 k22 + 2 k12 k13 k23 - k122 k33 + k11 k22 k33
```

```
In[121]:= FrequencyEquation3 = algdet == 0
```

```
Out[121]= -m1 m2 m3 ω6 + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω4 +
  (m3 k122 + k232 m1 - k22 k33 m1 + k132 m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω2 -
  k11 k232 - k132 k22 + 2 k12 k13 k23 - k122 k33 + k11 k22 k33 == 0
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH9 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ: ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ)

```
In[122]:= deqa[1] =
  m1 u1''[t] + k11 (u1[t] - ug[t]) + k12 (u2[t] - ug[t]) + k13 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[123]:= deqa[2] =
  m2 u2''[t] + k12 (u1[t] - ug[t]) + k22 (u2[t] - ug[t]) + k23 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[124]:= deqa[3] =
  m3 u3''[t] + k13 (u1[t] - ug[t]) + k23 (u2[t] - ug[t]) + k33 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[125]:= deqr[1] = m1 u1''[t] + k11 u1[t] + k12 u2[t] + k13 u3[t] == -m1 ug''[t];
```

```
In[126]:= deqr[2] = m2 u2''[t] + k12 u1[t] + k22 u2[t] + k23 u3[t] == -m2 ug''[t];
```

```
In[127]:= deqr[3] = m3 u3''[t] + k13 u1[t] + k23 u2[t] + k33 u3[t] == -m3 ug''[t];
```

```
In[128]:= comment =
  "Το δεύτερο σύστημα προτιμάται, γιατί περιέχει την οριζόντια επιτάχυνση
  του εδάφους, δεύτερη παράγωγο της μετατοπίσεώς του, που είναι άμεσα
  διαθέσιμη από το επιταχυνσιογράφημα που δίνει το επιταχυνσιόμετρο.";
```

```
In[129]:= peff[t_] = {-m1 ug''[t], -m2 ug''[t], -m3 ug''[t]}; peff[t] // MatrixForm
```

```
Out[129]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -m_1 u_g''(t) \\ -m_2 u_g''(t) \\ -m_3 u_g''(t) \end{pmatrix}$$

```
In[130]:= UnitVector = {1, 1, 1}; UnitVector // MatrixForm
```

```
Out[130]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
In[131]:= peff1[t_] = -M.UnitVector ug''[t]; peff1[t] // MatrixForm
```

```
Out[131]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -m_1 u_g''(t) \\ -m_2 u_g''(t) \\ -m_3 u_g''(t) \end{pmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica*, που έχουν προετοιμασθεί με αρκετή προσοχή, λίγο-πολύ σαν να ήταν απλές επιστημονικές εργασίες, και επιχειρούν να δείξουν τη χρησιμότητά της σε συγκεκριμένα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού που σχετίζονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τα notebooks αυτά είναι τα εξής:

● ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS

1. *Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-NEWTON: Νόμος του Νεύτωνα* (5 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Το notebook αυτό αφορά στον πολύ γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Δυναμική. Αυτός αποτελεί τη βάση της μελέτης πάρα πολλών φαινομένων του Πολιτικού Μηχανικού, όπως του φαινομένου της σεισμικής φορτίσεως μιας κατασκευής. Κατ' αρχήν αναφέρεται ο νόμος αυτός για την κίνηση υλικού σημείου με γνωστή εξωτερική δύναμη και με χρήση του σχηματίζεται η σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως για τη θέση του υλικού σημείου. Καταστρώνεται επίσης και το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Στη συνέχεια μελετάται η περίπτωση σταθερής εξωτερικής δυνάμεως και λύνεται το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται επίσης ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου προέρχεται απλά από το έργο που παράγει η εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται πάνω του. Μετά μελετάται μια ειδική περίπτωση μη σταθερής (μεταβλητής) εξωτερικής δυνάμεως που περιέχει δύο τριγωνομετρικούς όρους και έναν αρνητικό εκθετικό όρο και λύνεται και πάλι το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Η μέθοδος στο notebook αυτό μπορεί βέβαια να εφαρμοσθεί και για πολλές άλλες μορφές εξωτερικών δυνάμεων και επίσης να γενικευθεί και σε πολύ δυσκολότερα προβλήματα της Δυναμικής.

2. *Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-FALL: Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου* (13 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Στο notebook αυτό με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μελετάται η ελεύθερη πτώση ενός υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας. Καταστρώνεται η σχετική διαφορική εξίσωση για τη θέση του υλικού σημείου και προσδιορίζεται η γενική λύση της με άμεση ολοκλήρωση και, ανεξάρτητα, με τη χρήση της εντολής επίλυσεως διαφορικών εξισώσεων *DSolve* της *Mathematica*. Στη συνέχεια καθορίζεται το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών και λύνεται και αυτό τόσο κατευθείαν με την εντολή *DSolve* όσο και με προσδιορισμό των σταθερών στη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως που έχει ήδη βρεθεί. Μετά την επιμελημένη γραφική παράσταση της λύσεως που βρέθηκε χρησιμοποιείται η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξισώσεως για την επίλυση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. Τέλος χρησιμοποιείται και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών. Φυσικά τα αποτελέσματα με όλες αυτές τις μεθόδους συμφωνούν μεταξύ τους, όπως αναμενόταν, και πραγματικά συνιστάται στον Πολιτικό Μηχανικό η χρήση διαφορετικών μεθόδων για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος της επιστήμης του.

Τα δύο αυτά εφαρμοσμένα notebooks έχουν προφανώς το καθαυτό ενδιαφέρον τους και στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα συγκεκριμένα στη Δυναμική. Η παρουσία τους όμως εδώ στοχεύει επίσης και στη χρήση τους σαν υποδειγμάτων από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την εξίσου επιμελημένη προετοιμασία και των δικών του/των δικών της εφαρμοσμένων notebooks με τη *Mathematica*.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMII-NEWTON ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Δυναμική του Υλικού Σημείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αρχικές Συνθήκες, Προβλήματα Αρχικών Τιμών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου, Δύναμη, Θέση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, Εξισώσεις Κινήσεως, Έργο, Κινητική Ενέργεια

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Fowles, G. R. and Cassiday, G. L., *Analytical Mechanics*, 6η Έκδοση. Saunders College Publishing, Fort Worth, Philadelphia, 1999, Κεφάλαιο 2.

[2] Timoshenko, S. and Young, D. H., *Engineering Mechanics*, 4η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 1983, Κεφάλαιο 6.

[3] Shames, I. H., *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, 4η Έκδοση. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997, Κεφάλαιο 12.

1.1. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Θεωρούμε τον κλασικό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Δυναμική του υλικού σημείου. Σύμφωνα με το νόμο αυτό κατά την ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου M (κατά μήκος του x -άξονα και με t το χρόνο) το γινόμενο της μάζας m του υλικού σημείου επί την επιτάχυνσή του $a(t)$ ισούται με τη δύναμη $F(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Δηλαδή ισχύει η εξίσωση

$$\text{In}[1] := \mathbf{eq} = m \mathbf{a}[t] == \mathbf{F}[t]$$

$$\text{out}[1] = m \mathbf{a}(t) == \mathbf{F}(t)$$

Όμως η επιτάχυνση $a = a(t)$ του υλικού σημείου M είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας $v = v(t)$ ή η δεύτερη παράγωγος της θέσεως $x = x(t)$ του ίδιου υλικού σημείου. Συνεπώς έχουμε

$$\text{In}[2] := \mathbf{a}[t_] := \mathbf{v}'[t]$$

και επομένως η εξίσωση \mathbf{eq} (ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) παίρνει τη μορφή

$$\text{In}[3] := \mathbf{eq}$$

$$\text{out}[3] = m \mathbf{v}'(t) == \mathbf{F}(t)$$

και επειδή, όπως αναφέρθηκε, η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της θέσεως, δηλαδή

$$\text{In}[4] := \mathbf{v}[t_] := \mathbf{x}'[t]$$

προκύπτει τελικά η εξής διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου M :

```
In[5]:= deq = eq
```

```
Out[5]= m x''(t) == F(t)
```

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι προφανώς συνήθης, γραμμική, δευτέρας τάξεως, πρώτου βαθμού, με σταθερό συντελεστή (αν και αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία στην παρούσα διαφορική εξίσωση) και γενικά μη ομογενής (εννοείται για μη μηδενική δύναμη $F = F(t)$). Εν προκειμένω θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **DSolve** επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων στη *Mathematica* για την επίλυσή της. Εντούτοις καταρχήν θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε και άμεσα με δύο απλές ολοκληρώσεις μέσω της εντολής **Integrate**.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση της κινήσεως **deq** συνοδεύεται συνήθως στο παρόν πρόβλημα κινήσεως και από τις δύο αρχικές συνθήκες (αρχική θέση x_0 κι αρχική ταχύτητα v_0 για το υλικό σημείο), που τις συμβολίζουμε σαν **ics** (initial conditions):

```
In[6]:= ics = {x[0] == x0, v[0] == v0}
```

```
Out[6]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Επ' ευκαιρία παρατηρούμε ότι η *Mathematica* χρησιμοποίησε τον ορισμό της ταχύτητας σαν παράγωγο της θέσεως στον αμέσως πιο πάνω "υπολογισμό" των δύο αρχικών συνθηκών **ics**.) Επομένως έχουμε τώρα ένα πλήρες πρόβλημα αρχικών τιμών. Αυτό αποτελείται από τρεις εξισώσεις **eqs**, δηλαδή από τη διαφορική εξίσωση **deq** και τις αρχικές συνθήκες **ics**. Άρα

```
In[7]:= eqs = {deq, ics} // Flatten
```

```
Out[7]= {m x''(t) == F(t), x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Η εντολή **Flatten** χρησιμεύει στο να δημιουργηθεί μια απλή λίστα εξισώσεων για το πρόβλημά μας. Η χρήση της δεν είναι απαραίτητη στις λίστες εξισώσεων που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με την εντολή **DSolve** στην παρούσα version 4.1 της *Mathematica*.)

1.2. Σταθερή δύναμη πάνω στο υλικό σημείο

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να λύσουμε το πρόβλημα κινήσεως που έχουμε πρώτα για μια σταθερή δύναμη F_0

```
In[8]:= F[t_] := F0
```

Η σχετική λύση **sol1** προκύπτει άμεσα με τη χρήση της εντολής **DSolve**. Επομένως

```
In[9]:= eqs
```

```
Out[9]= {m x''(t) == F0, x(0) == x0, x'(0) == v0}
```



```
In[10]:= sol1 = DSolve[eqs, x[t], t][[1]] // Simplify
```

$$\text{Out[10]} = \left\{ x(t) \rightarrow \frac{F_0 t^2}{2m} + v_0 t + x_0 \right\}$$

(Η βοηθητική εντολή **Simplify** μας επέτρεψε μια μικρή απλοποίηση του αποτελέσματος.) Μπορούμε τώρα εύκολα να προσδιορίσουμε τη θέση $x_1(t)$, την ταχύτητα $v_1(t)$ και την επιτάχυνση $a_1(t)$ του υλικού σημείου M που αντιστοιχούν στη λύση αυτή. (Μια λίστα τριών εντολών αρκεί!) Επομένως έχουμε

```
In[11]:= {x1[t_] = x[t] /. sol1, v1[t_] = x1'[t], a1[t_] = v1'[t]}
```

$$\text{Out[11]} = \left\{ \frac{F_0 t^2}{2m} + v_0 t + x_0, \frac{F_0 t}{m} + v_0, \frac{F_0}{m} \right\}$$

(Προφανώς η επιτάχυνση $a_1(t)$ είναι στην παρούσα περίπτωση σταθερή, η ταχύτητα $v_1(t)$ πρωτοβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου t και η θέση $x_1(t)$ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου t στην απλή περίπτωση σταθερής δυνάμεως $F = F_0$ πάνω στο υλικό σημείο την κίνηση του οποίου εξετάζουμε. Όλα αυτά είναι εύλογα.) Η επαλήθευση των τριών εξισώσεων **eqs** είναι άμεση, πάρα πολύ απλή με τον παρόντα συμβολισμό:

```
In[12]:= ver1 = eqs /. x → x1
```

```
Out[12]= {True, True, True}
```

Επομένως και οι τρεις εξισώσεις μας **eqs**, η διαφορική εξίσωση της κινήσεως **deq** και οι δύο αρχικές συνθήκες **ics**, επαληθεύονται και είμαστε έτσι βέβαιοι για το μαθηματικό μέρος της λύσεως του προβλήματός μας. Εντούτοις από φυσικής απόψεως, δηλαδή αν πραγματικά οι εξισώσεις μας **eqs** είναι και αυτές σωστές και πόσο σωστές άραγε, δηλαδή πόσες παραδοχές έχουν γίνει (π.χ. αγνοήθηκε κάθε αντίσταση και τριβή, το σώμα μας θεωρήθηκε απλά υλικό σημείο M , κλπ.), αυτό είναι ένα άλλο θέμα καθαρής αρμοδιότητας του Πολιτικού Μηχανικού. Ασφαλώς το θέμα αυτό είναι έξω από τους άμεσους στόχους του παρόντος εφαρμοσμένου notebook.

Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε την εξάρτηση της θέσεως $x_1(t)$ (που δηλώνεται τώρα σαν x_t τη χρονική στιγμή t) από την ταχύτητα $v_1(t)$ (που δηλώνεται τώρα σαν v_t τη χρονική στιγμή t) στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτό το πετυχαίνουμε απαλείφοντας το χρόνο t μεταξύ των δύο αυτών ποσοτήτων με τη χρήση της εντολής **Eliminate** της *Mathematica*. Έτσι βρίσκουμε (με απαλοιφή του χρόνου t)

```
In[13]:= elimination = Eliminate[{x1[t] == xt, v1[t] == vt}, t] // Simplify
```

$$\text{Out[13]} = vt^2 == \frac{m v_0^2 - 2 F_0 x_0 + 2 F_0 x_t}{m} \wedge m \neq 0$$

(με το σύμβολο \wedge να παριστάνει το λογικό “και”, “and” στα Αγγλικά). Υποθέτουμε τώρα ότι η μάζα m του υλικού σημείου M είναι μη μηδενική (επειδή είναι θετική ποσότητα), όπως πραγματικά συμβαίνει. Μπορούμε έτσι να περιορισθούμε στο πρώτο μέρος της παραπάνω απαλοιφής **elimination** (δηλαδή στον πρώτο όρο της σχετικής λογικής συζεύξεως), παίρνοντας απλά την εξής ισότητα μετά από πολλαπλασιασμό και των δύο μελών επί $(1/2)m$:

In[14]:= **EnergyEquation1** = $\frac{1}{2} m$ elimination[[1, 1]] == $\frac{1}{2} m$ elimination[[1, 2]] // **Simplify**

$$\text{Out[14]} = \frac{m v t^2}{2} == \frac{m v_0^2}{2} - F_0 x_0 + F_0 x t$$

για τη σχέση που συνδέει τη θέση x_t του υλικού σημείου M με την ταχύτητά του v_t (τη χρονική στιγμή t). Προφανώς η σχέση αυτή αναφέρεται στην αύξηση (για $F_0 > 0$) της κινητικής ενέργειας $T = (1/2) m v_t^2$ του υλικού σημείου M , η οποία οφείλεται στο έργο $W = F_0(x_t - x_0)$ της δύναμης F_0 που έχει παραχθεί κατά την κίνηση του υλικού σημείου M από την αρχική θέση του x_0 (για $t = 0$) μέχρι την κάθε φορά (μεταβλητή) θέση του x_t τη χρονική στιγμή t . Η ίδια σχέση γράφεται και στην εξής απόλυτα ισοδύναμη μορφή:

In[15]:= **EnergyEquation2** = $\frac{1}{2} m (v t^2 - v_0^2)$ == **F0 (xt - x0)**

$$\text{Out[15]} = \frac{1}{2} m (v t^2 - v_0^2) == F_0 (x t - x_0)$$

Κι αντίστροφα, όπως ασφαλώς και αναμένεται, η παραπάνω ενεργειακή εξίσωση **EnergyEquation2** διαπιστώνεται αμέσως ότι επαληθεύεται από τις εκφράσεις της θέσεως $x_1(t)$ και της ταχύτητας $v_1(t)$ που ήδη βρέθηκαν στην παρούσα ευθύγραμμη κίνηση του υλικού σημείου M , δηλαδή

In[16]:= **EnergyConservation** = **EnergyEquation2** /. {xt → x1[t], vt → v1[t]} // **Simplify**

Out[16]= True

Επομένως πέρα από την καθαρά μαθηματική επαλήθευση των εξισώσεων **eqs** (της διαφορικής εξίσωσης **deq** και των αρχικών συνθηκών **ics**) του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών κάναμε επιπλέον και την επαλήθευση της ισχύος της σχετικής ενεργειακής εξίσωσης **EnergyEquation2**. Δηλαδή διαπιστώσαμε ότι η λύση μας $x_1(t)$ για τη θέση του υλικού σημείου M και η έκφραση της ταχύτητας $v_1(t) = x_1'(t)$ του ίδιου υλικού σημείου που προέκυψε από αυτήν πραγματικά επαληθεύουν το από φυσικής απόψεως αναμενόμενο γεγονός. Το γεγονός αυτό είναι ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας T του υλικού σημείου M στ' αλήθεια οφείλεται στο έργο W της εξωτερικής δύναμης F_0 κατά την κίνηση αυτή του υλικού σημείου M . Με τον τρόπο αυτό η εμπιστοσύνη μας προς τη λύση **sol1**, η οποία βρέθηκε για το πρόβλημα αρχικών τιμών που έχουμε (βασικά με τη χρήση της εντολής **DSolve**) αυξάνεται ακόμη περισσότερο, γίνεται σχεδόν βεβαιότητα.

1.3. Μεταβλητή δύναμη πάνω στο υλικό σημείο

Θα προχωρήσουμε τώρα σε ένα παρόμοιο πρόβλημα, αλλά με μεταβλητή τη δύναμη $F = F(t)$ που εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο, συγκεκριμένα με

In[17]:= **F[t_]:= F1 Cos[a t] + F2 Sin[b t] + F3 Exp[-c t]**

(με τις ποσότητες $F_{1,2,3}$ και a, b, c σταθερές). Για την επίλυση των εξισώσεών μας **eqs** θα χρησιμοποιηθεί και πάλι η εντολή **DSolve**. Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως γίνεται

λιγάκι πιο πολύπλοκη (χωρίς όμως να αλλάζουν οι χαρακτηρισμοί της). Έχουμε επομένως (και απολύτως ανάλογα με τα προηγούμενα και μάλιστα με χρήση ανάλογων συμβόλων)

`In[18]:= deq`

`Out[18]= m x''(t) == e^{-ct} F3 + F1 cos(a t) + F2 sin(b t)`

`In[19]:= eqs`

`Out[19]= {m x''(t) == e^{-ct} F3 + F1 cos(a t) + F2 sin(b t), x(0) == x0, x'(0) == v0}`

`In[20]:= sol2 = DSolve[eqs, x[t], t][[1]] // Simplify`

`Out[20]= {x(t) → -\frac{\cos(a t) F1}{a^2 m} + \frac{F1}{a^2 m} + \frac{F2 t}{b m} + \frac{F3 t}{c m} + t v0 + x0 - \frac{F2 \sin(b t)}{b^2 m} + \frac{e^{-ct} F3}{c^2 m} - \frac{F3}{c^2 m}}`

`In[21]:= {x2[t_] = x[t] /. sol2, v2[t_] = x2'[t], a2[t_] = v2'[t]} // Simplify`

`Out[21]= {-\frac{\cos(a t) F1}{a^2 m} + \frac{F1}{a^2 m} + \frac{F2 t}{b m} + \frac{F3 t}{c m} + t v0 + x0 - \frac{F2 \sin(b t)}{b^2 m} + \frac{e^{-ct} F3}{c^2 m} - \frac{F3}{c^2 m},`

$$\frac{a c F2 - a c \cos(b t) F2 - a b e^{-ct} F3 + a b F3 + a b c m v0 + b c F1 \sin(a t)}{a b c m},$$

$$\frac{e^{-ct} F3 + F1 \cos(a t) + F2 \sin(b t)}{m}}$$

Είναι πολύ καλό που χρησιμοποιήθηκε και πάλι η εντολή **Simplify** στους συγκεκριμένους υπολογισμούς. Είναι επίσης χρήσιμη και σε πάρα πολλούς άλλους πολύπλοκους υπολογισμούς. Μερικές φορές μάλιστα απαιτείται αντί γι' αυτή η χρήση και της αρκετά πιο ισχυρής εντολής **FullSimplify** για σχεδόν άριστα υπολογιστικά αποτελέσματα. Η επαλήθευση της λύσεως είναι και τώρα πάρα πολύ εύκολη

`In[22]:= ver2 = eqs /. x → x2`

`Out[22]= {m \left(\frac{e^{-ct} F3}{m} + \frac{F1 \cos(a t)}{m} + \frac{F2 \sin(b t)}{m} \right) == e^{-ct} F3 + F1 \cos(a t) + F2 \sin(b t),`
`True, True}`

Πρέπει όμως να χρησιμοποιηθεί (και πάλι) και η εντολή **Simplify** μόνο όσον αφορά στην ίδια τη διαφορική εξίσωση **deq**. Για τις αρχικές συνθήκες **ics** διαπιστώθηκε ήδη ότι δεν απαιτείται η χρήση της:

`In[23]:= ver2 // Simplify`

`Out[23]= {True, True, True}`

Φυσικά η *Mathematica* μπορεί να μας οδηγήσει και στις λύσεις $x(t)$ πολύ πιο δύσκολων προβλημάτων ευθύγραμμης κινήσεως υλικού σημείου M της μορφής που εξετάζουμε εδώ, δηλαδή με πολύ πιο πολύπλοκες εκφράσεις της δυνάμεως $F = F(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Ασφαλώς όμως η παράθεση τέτοιων πολύπλοκων εκφράσεων, αν και υπολογιστικά είναι απόλυτα εφικτή, εντούτοις πρακτικά δεν εξυπηρετεί κανέναν ουσιαστικό εκπαιδευτικό σκοπό!

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMII-FALL ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Δυναμική του Υλικού Σημείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις, Γενική Λύση, Μερική Λύση, Χαρακτηριστική Εξίσωση, Αρχικές Συνθήκες, Προβλήματα Αρχικών Τιμών, Μετασχηματισμός Laplace

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου, Ευθύγραμμη Κίνηση, Ελεύθερη Πτώση, Θέση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση της Βαρύτητας, Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, Εξισώσεις Κινήσεως

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Μάρκελλου, Β. Β., *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Τόμος II, Τεύχος 5: *Διαφορικές Εξισώσεις: Εισαγωγή*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000, Κεφάλαιο 1, Εδάφιο 1.1.

[2] Fowles, G. R. and Cassiday, G. L., *Analytical Mechanics*, 6η Έκδοση. Saunders College Publishing, Fort Worth, Philadelphia, 1999, Κεφάλαιο 2.

[3] Timoshenko, S. and Young, D. H., *Engineering Mechanics*, 4η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 1983, Κεφάλαιο 6.

[4] Shames, I. H., *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, 4η Έκδοση. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997, Κεφάλαια 11-12.

2.1. Το μηχανικό πρόβλημα

Θεωρούμε το κλασικό μηχανικό πρόβλημα της ελεύθερης πτώσεως υλικού σημείου M (μάζας m) χωρίς καθόλου τριβές ή άλλη αντίσταση του αέρα στο γήινο πεδίο βαρύτητας με g την επιτάχυνση της βαρύτητας (προς τη γη). Στο στοιχειώδες αυτό πρόβλημα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει την εξής απλή μορφή διαφορικής εξίσωσης (differential equation) **de** στη *Mathematica*:

```
In[1]:= de = D[x[t], {t, 2}] == -g
```

```
Out[1]= x''(t) == -g
```

ως προς τη θέση (ύψος) $x(t)$ του υλικού σημείου M (με τη θετική φορά του $x(t)$ να έχει επιλεγεί προς τα πάνω) συναρτήσει του χρόνου t . Η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση **de** μπορεί φυσικά να δηλωθεί (απόλυτα ισοδύναμα) και με τον απλούστερο συμβολισμό

```
In[2]:= de = x''[t] == -g
```

```
Out[2]= x''(t) == -g
```

Εν πάση περιπτώσει έχουμε μια απλή συνήθη διαφορική εξίσωση **de** της κινήσεως (ελεύθερης πτώσεως χωρίς τριβές ή αντίσταση του αέρα) για το υλικό σημείο M . Η διαφορική αυτή εξίσωση **de** είναι δευτέρας τάξεως (λόγω της εμφανίσεως της δευτέρας παραγώγου ως προς τη θέση $x(t)$), πρώτου βαθμού (γιατί η δεύτερη αυτή παράγωγος είναι υψωμένη

στην πρώτη δύναμη), προφανώς γραμμική και με σταθερό συντελεστή (τη μονάδα) στη δεύτερη παράγωγο που προαναφέρθηκε (αν και αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία εν προκειμένω λόγω της μη υπάρξεως άλλων παραγώγων) και μη ομογενής (λόγω της εμφάνισης της επιταχύνσεως της βαρύτητας g στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης de). Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η θέση x και η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t .

2.2. Άμεση ολοκλήρωση

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης de μπορούμε να εργασθούμε με διάφορους τρόπους. Στο βιβλίο [1] επιδεικνύεται η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης. Με τη *Mathematica* η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί (με τη χρήση της εντολής **Integrate** για τις ολοκληρώσεις) ως εξής:

```
In[3]:= de1 = Integrate[de[[1]], t] == Integrate[de[[2]], t] + k1
```

```
Out[3]= x'(t) == k1 - g t
```

Εδώ δε λησμονήσαμε να προσθέσουμε μια σταθερά ολοκλήρωσης k_1 (κατά προτίμηση, αλλ' όχι απαραίτητα, στην ολοκλήρωση του δεξιού μέλους) και να δηλώσουμε τη νέα διαφορική εξίσωση σαν $de1$. Ασφαλώς η εντολή **Integrate** μπορεί να γραφεί αρκετά πιο παραδοσιακά με τη χρήση του συνηθισμένου συμβόλου της ολοκλήρωσης \int . Τότε έχουμε και πάλι (απόλυτα ισοδύναμα, όπως παρατηρούμε από το πιο κάτω αποτέλεσμα)

```
In[4]:= de1 = ∫ de[[1]] dt == ∫ de[[2]] dt + k1
```

```
Out[4]= x'(t) == k1 - g t
```

Με τον τρόπο αυτό η αρχική διαφορική εξίσωση de (δευτέρας τάξεως, όπως ήδη αναφέρθηκε) έχει μετατραπεί σε μια απλούστερη διαφορική εξίσωση $de1$ πρώτης τάξεως (τώρα ως προς την ταχύτητα $x'(t) = v(t)$ του ίδιου υλικού σημείου M). Αυτό το πετύχαμε με την πιο πάνω ολοκλήρωση. Κατ' ανάλογο τρόπο, δηλαδή με μια ακόμη ολοκλήρωση (και στα δύο μέλη και πάλι) μπορούμε να απαλλαγούμε εντελώς από την παράγωγο και να έχουμε την τελική έκφραση της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M (ασφαλώς σαν συνάρτηση του χρόνου t)

```
In[5]:= θέση = ∫ de1[[1]] dt == ∫ de1[[2]] dt + k2
```

```
Out[5]= x(t) == -\frac{g t^2}{2} + k1 t + k2
```

Εδώ εισαγάγαμε και μια δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης: την k_2 . Με το σύμβολο **θέση** δηλώσαμε την παραπάνω εξίσωση για τη θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M . Η *Mathematica* θυμάται βέβαια το σύμβολο αυτό:

```
In[6]:= θέση
```

```
Out[6]= x(t) == -\frac{g t^2}{2} + k1 t + k2
```

που μπορούμε πια να το χρησιμοποιούμε όποτε θέλουμε, π.χ. για να δηλώσουμε τη λύση $x_g(t)$ του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως που εξετάζουμε (δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης **de**) σαν συνάρτηση στη *Mathematica*:

```
In[7]:= xg[t_] = θέση[2]
```

$$\text{Out}[7]= -\frac{g t^2}{2} + k_1 t + k_2$$

Επ' ευκαιρία σημειώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή $x_g(t)$ αποτελεί τη γενική λύση (general solution) του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M , γιατί δεν καθορίστηκαν μέχρι στιγμής αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$. Παρά ταύτα διαπιστώνεται ότι οι αυθαίρετες σταθερές k_2 και k_1 δηλώνουν εν προκειμένω την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου M αντίστοιχα, όπως αμέσως παρατηρούμε πολύ εύκολα:

```
In[8]:= {xg[0], xg'[t] /. t -> 0}
```

```
Out[8]= {k2, k1}
```

Σημειώνουμε επίσης ότι είναι απόλυτα δικαιολογημένη η εμφάνιση δύο σταθερών, των k_1 και k_2 , στην παραπάνω γενική λύση $x_g(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de**. Αυτό συμβαίνει, επειδή πρόκειται για διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Ο Πολιτικός Μηχανικός έχει τεράστια ευθύνη στις κατασκευές και στα λοιπά έργα που αναλαμβάνει και πρέπει ασφαλώς από τώρα (δηλαδή ακόμη και σαν φοιτητής/φοιτήτρια) να συνηθίσει να επαληθεύει τα αποτελέσματά του, εν προκειμένω την τόσο απλή και γνωστή λύση $x_g(t)$ του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως για τη θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M . Αυτό ασφαλώς είναι εξαιρετικά εύκολο με τη *Mathematica*:

```
In[9]:= επαλήθευση = de /. x -> xg
```

```
Out[9]= True
```

Οποσδήποτε αντί για το σύμβολο **επαλήθευση** θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί και οποιοδήποτε άλλο σύμβολο (π.χ. **verification** ή η προφανής σύντμησή του **ver**) ή και κανένα απολύτως σύμβολο, δηλαδή

```
In[10]:= de /. x -> xg
```

```
Out[10]= True
```

Καλό είναι όμως να δηλώνουμε με σύμβολα τις παραστάσεις και τα αποτελέσματα που παίρνουμε στη *Mathematica* (εν προκειμένω το λογικό αποτέλεσμα True, δηλαδή αληθές). Έτσι θα μπορούμε, αν χρειασθεί, να τα έχουμε διαθέσιμα στους παραπέρα υπολογισμούς μας, όπως ήδη κάναμε με το σύμβολο **de** για την αρχική διαφορική εξίσωσή μας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε αμέσως πιο πάνω. (Αν δεν το είχαμε διαθέσιμο, θα έπρεπε να ξαναγράψουμε τη διαφορική εξίσωση της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M .) Το επιχείρημα ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι απλή δεν ευσταθεί απόλυτα, γιατί υπάρχουν και πολύπλοκες ακόμη και εξαιρετικά πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις στην Επιστήμη του

Πολιτικού Μηχανικού. Γιατί να μην τους δίνουμε ένα όνομα, π.χ. **de**, **de1** ή **deq** (από τον όρο differential equation) ή και **δε** (διαφορική εξίσωση), ώστε να τις θυμάται η *Mathematica*;

2.3. Χρήση της εντολής **DSolve**

Πέρα από τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης, που επιδείχθηκε αναλυτικά πιο πάνω στην απλή διαφορική εξίσωσή μας **de**, η *Mathematica* διαθέτει ασφαλώς και ειδική εντολή για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που επιδέχονται αναλυτική επίλυση (ακόμη και πολύ δύσκολων τέτοιων εξισώσεων). Αυτή είναι η εντολή **DSolve**. Με τη χρήση της εντολής αυτής, που έχει τρία ορίσματα: τη διαφορική εξίσωση, την άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) και την ανεξάρτητη μεταβλητή, μπορούμε να βρούμε αμέσως τη λύση **λύση** της διαφορικής εξισώσεώς μας **de** ως εξής:

```
In[11]:= λύση = DSolve[de, x[t], t]
```

```
Out[11]= {{x(t) -> -\frac{g t^2}{2} + c_2 t + c_1}}
```

Ασφαλώς θα μπορούσαμε να μην είχαμε δώσει όνομα (**λύση**) στη λύση αυτήν, αν όμως τη χρειαστούμε παραπέρα, ακόμη και μέσα στο κείμενο, θα πρέπει να την ξαναυπολογίσουμε ή να την ξαναγράψουμε; (Όχι βέβαια!) Έτσι επιλέξαμε εύλογα να της δώσουμε ένα όνομα. Φυσικά ο παρατηρητικός φοιτητής/η παρατηρητική φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός έχει ήδη σημειώσει την ουσιαστική σύμπτωση της πιο πάνω λύσεως (**λύση**) με την ανάλογη λύση (**θέση**) που είχε προκύψει την μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης της ίδιας διαφορικής εξισώσεως **de** της κινήσεως του υλικού σημείου *M* (με μόνη ουσιαστική διαφορά στα σύμβολα για τις αυθαίρετες σταθερές και στο συμβολισμό γενικότερα).

Είναι πραγματικά πολύ χρήσιμο ο Πολιτικός Μηχανικός να χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές μεθόδους στην επίλυση των προβλημάτων του, γιατί με αυτό τον τρόπο ελέγχει τις μεθόδους που χρησιμοποιεί (πέρα από την επαλήθευση των αποτελεσμάτων σε μια μόνο μέθοδο σε όσο βαθμό είναι και αυτή δυνατή). Εν προκειμένω η εντολή **DSolve** προγραμματίστηκε από ανθρώπους στην εταιρεία Wolfram Research, Inc., η οποία έχει αναπτύξει τη *Mathematica* (υπό τη διεύθυνση του διάσημου Stephen Wolfram), και προφανώς, ποτέ δεν είναι 100% βέβαιο ότι όλοι οι προγραμματιστές δεν κάνουν ποτέ λάθη. Ανάλογα ισχύουν, θεωρητικά τουλάχιστον, και με τα προγράμματα που χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός στη μελέτη κατασκευών, π.χ. στη στατική και τη δυναμική ανάλυση μιας πολυκατοικίας: η χρήση δύο τέτοιων προγραμμάτων για την ίδια μελέτη ασφαλώς δίνει μια σιγουριά στο μελετητή Πολιτικό Μηχανικό, εφόσον βέβαια τα αποτελέσματα είναι ανάλογα υπό τους ίδιους αρχιτεκτονικούς, λειτουργικούς και τεχνικούς περιορισμούς και προϋποθέσεις. Δεν είναι έτσι;

Ας σημειωθεί επίσης ότι από την παραπάνω γενική λύση **λύση** που βρήκαμε μπορούμε αμέσως να πάρουμε και τη σχετική συνάρτηση $x_y(t)$ ανάλογα με ό,τι κάναμε προηγουμένως, δηλαδή

```
In[12]:= xy[t_] = λύση[[1, 1, 2]]
```

```
Out[12]= -\frac{g t^2}{2} + c_2 t + c_1
```

με τους δείκτες στο δεξιό μέλος της πιο πάνω εκφράσεως να αποβλέπουν στην “απόσπαση” της κύριας εκφράσεως που θέλουμε στην παραπάνω λύση μας (που βασίστηκε στη χρήση της εντολής **DSolve**). Η παραπάνω γενική λύση είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο ως προς το χρόνο t και είναι επίσης διπαραμετρική: παράμετροι $c_{1,2}$, που μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές πραγματικές ή μιγαδικές. Εννοείται βέβαια ότι ο Πολιτικός Μηχανικός θα αποκλείσει τις μιγαδικές τιμές στις παραμέτρους αυτές, γιατί δεν έχει φυσικό νόημα μιγαδική θέση $x(t)$ στην ελεύθερη πτώση υλικού σημείου M .

Σημειώνεται επίσης (και πάλι) ότι οι δύο παραπάνω γενικές λύσεις που βρήκαμε (τυπικά τουλάχιστον με δύο διαφορετικές μεθόδους) συμπίπτουν, επειδή

```
In[13]:= xg[t] == xv[t] /. {k1 -> C[2], k2 -> C[1]}
```

```
Out[13]= True
```

μετά από μια λίγο-πολύ προφανή αλλαγή των συμβόλων για τις δύο παραμέτρους $k_{1,2}$ της πρώτης λύσεως $x_g(t)$ (που τα επιλέξαμε εμείς), ώστε αυτά να συμπέσουν με τα σύμβολα των παραμέτρων $c_{2,1}$ της δεύτερης λύσεως $x_v(t)$ (που τα επέλεξε η ίδια τη *Mathematica*).

2.4. Αρχικές συνθήκες: το πρόβλημα αρχικών τιμών

Συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός ενδιαφέρεται για τη λύση ενός φυσικού προβλήματος που τον αφορά υπό συγκεκριμένες συνθήκες που εξασφαλίζουν το μονοσήμαντο της λύσεως αυτής. Δηλαδή ενδιαφέρεται για μία και μοναδική λύση σε κάθε φυσικό πρόβλημα. Επομένως δεν ενδιαφέρεται για διπαραμετρικές οικογένειες λύσεων στην καθημερινή πρακτική. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M στην πραγματικότητα πρέπει να ξέρουμε τις καλούμενες αρχικές συνθήκες του προβλήματος αυτού (για $t = 0$), δηλαδή την αρχική θέση (ύψος) x_0 και την αρχική ταχύτητα v_0 του υλικού σημείου M με άλλες λέξεις με ποιον τρόπο αρχίζει η κίνηση του υλικού αυτού σημείου. Αυτές οι αρχικές συνθήκες θα μας επιτρέψουν τον πλήρη προσδιορισμό της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου χωρίς πλέον την εμφάνιση των παραμέτρων $k_{1,2}$ ή $c_{2,1}$, αλλά με την αντικατάστασή τους από τις ίδιες τις αρχικές συνθήκες (x_0, v_0) έστω και σε μη αριθμητική μορφή. Ας δηλώσουμε επομένως τις αρχικές αυτές συνθήκες με το σύμβολο **ics** (initial conditions, αρχικές συνθήκες):

```
In[14]:= ics = {x[0] == x0, x'[0] == v0}
```

```
Out[14]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

Σε τόσο απλές δηλώσεις είναι απόλυτα άχρηστο να θέλουμε και το τετριμμένο αποτέλεσμα του υπολογισμού από τη *Mathematica*. Έτσι γράφουμε απλά και ασφαλώς απόλυτα ισοδύναμα

```
In[15]:= ics = {x[0] == x0, x'[0] == v0};
```

για να μην πάρουμε έξοδο (output) από το πρόγραμμα. Τώρα έχουμε τρεις εξισώσεις: (α) τη διαφορική εξίσωση **de** και (β) τις αρχικές συνθήκες **ics**. Ας τις δηλώσουμε όλες μαζί με το σύμβολο **eqs** (equations, εξισώσεις)


```
In[16]:= eqs = {de, ics}
```

```
Out[16]= {x''(t) == -g, {x(0) == x0, x'(0) == v0}}
```

Αυτές οι τρεις εξισώσεις μας αποτελούν (από κοινού) ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (initial value problem), το οποίο πρέπει να λύσουμε και να βρούμε τη λύση του **sol** (solution, λύση)

```
In[17]:= sol = DSolve[eqs, x[t], t]
```

```
Out[17]= {{x(t) -> 1/2 (-g t^2 + 2 v0 t + 2 x0)}}
```

Η εντολή **Simplify** βοηθάει στην απλοποίηση της λύσεως αυτής:

```
In[18]:= sol = sol // Simplify
```

```
Out[18]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

και δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε εν προκειμένω ιδιαίτερο σύμβολο (π.χ. **sol1**) στην απλοποίηση αυτή της εκφράσεως της λύσεως **sol**. Συνήθως βέβαια ενώνουμε τις δύο παραπάνω εντολές σε μία μόνο εντολή ως εξής:

```
In[19]:= sol = Simplify[DSolve[eqs, x[t], t]]
```

```
Out[19]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

ή ίσως ακόμη απλούστερα

```
In[20]:= sol = DSolve[eqs, x[t], t] // Simplify
```

```
Out[20]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

για να δείξουμε επίσης ότι η εντολή **DSolve** είναι η βασική εντολή, ενώ η εντολή **Simplify** είναι η δευτερεύουσα εντολή. (Γι' αυτό και τη βάζουμε στο τέλος.)

Ας σημειωθεί και στο σημείο αυτό ότι στο παρόν notebook χρησιμοποιείται η version 4.1 της *Mathematica*. Αν είχαμε προηγούμενη version (π.χ. την version 4.0), θα έπρεπε πρώτα να χρησιμοποιήσουμε και την εντολή **Flatten** στις εξισώσεις μας, ώστε να έχουμε ένα απλό σύνολο εξισώσεων **eqs1** σαν πρώτο όρισμα της εντολής **DSolve**:

```
In[21]:= eqs1 = {de, ics} // Flatten
```

```
Out[21]= {x''(t) == -g, x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Φαίνεται ότι στη version 4.1, που χρησιμοποιείται εδώ, το καθήκον αυτό το αναλαμβάνει η ίδια η *Mathematica* αυτόματα.) Ασφαλώς μπορούμε εύκολα να χρησιμοποιήσουμε και τη συνθετότερη εντολή

```
In[22]:= sol1 = DSolve[{de, ics} // Flatten, x[t], t] // Simplify
```

```
Out[22]= {{x(t) -> -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0}}
```

(τόσο στη version 4.0 και στις προηγούμενες versions όσο και στη version 4.1) και παραλλαγές της εντολής αυτής.

Τελικά η μερική λύση (partial solution) του προβλήματος αρχικών τιμών που έχουμε έχει τη μορφή

```
In[23]:= x_p[t_] = x[t] /. sol[[1]]
```

```
Out[23]= -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0
```

Σημειώνεται πάντως ότι τόσο στη γενική λύση $x_g(t)$ (ή $x_v(t)$) όσο και στη μερική λύση $x_p(t)$ εμφανίζονται δύο επιπλέον σύμβολα πέρα από την επιτάχυνση της βαρύτητας g και την ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλαδή το χρόνο t). Η διαφορά είναι όμως ότι στη γενική λύση $x_g(t)$ τα δύο αυτά σύμβολα παρίσταναν αυθαίρετες σταθερές (ακόμη, θεωρητικά, και μιγαδικές), ενώ στη μερική λύση $x_p(t)$ (δηλαδή στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών) τα σύμβολα, x_0 και v_0 που εμφανίζονται παριστάνουν τις συγκεκριμένες τιμές της αρχικής θέσεως και της αρχικής ταχύτητας αντίστοιχα του υλικού σημείου M στο πρόβλημά μας. Όσες φορές διαθέτουμε αριθμητικές τιμές για την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα, τα πράγματα γίνονται πολύ πιο σαφή, γενικά όμως πρέπει να ομολογηθεί ότι η διαφορά μεταξύ γενικής και μερικής λύσεως στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες στην τελευταία παριστάνονται με σύμβολα (και όχι απλά αριθμούς) και μεν είναι φυσικά σαφής, αλλ' υπολογιστικά κάπως δισδιάκριτη. Με άλλα λόγια και στη μερική λύση $x_p(t)$ θα μπορούσε κάποιος να ερμηνεύσει τα σύμβολα x_0 και v_0 σαν αυθαίρετες σταθερές ξεχνώντας τις φυσικές σημασίες τους σαν αρχική θέση και ταχύτητα αντίστοιχα. Μετατρέπει έτσι στο νού του τη μερική αυτή λύση σε γενική λύση χωρίς κανέναν απολύτως υπολογισμό παρά την ουσιώδη διαφορά γενικής και μερικής λύσεως!

Βέβαια η επαλήθευση (verification) της μερικής λύσεως $x_p(t)$ που βρέθηκε είναι ωφέλιμη:

```
In[24]:= ver = eqs /. x -> x_p
```

```
Out[24]= {True, {True, True}}
```

Το παραπάνω σύνολο **ver** έχει δύο στοιχεία με το πρώτο να αναφέρεται στη διαφορική εξίσωση **de** και το δεύτερο να είναι και αυτό σύνολο με δύο στοιχεία που να αναφέρονται στις δύο αρχικές συνθήκες **ics**. Ίσως λίγο πιο απλά το σύνολο **ver** θα μπορούσε να γραφεί

```
In[25]:= ver1 = eqs1 /. x -> x_p
```

```
Out[25]= {True, True, True}
```

με το σχετικό αποτέλεσμα **ver1** να είναι τώρα ένα συνηθισμένο σύνολο με τρία στοιχεία (όλα ίσα με True και πάλι) λόγω των τριών εξισώσεων (της διαφορικής εξίσωσης και των αρχικών συνθηκών) του προβλήματος αρχικών τιμών που επιλύσαμε.

2.5. Προσδιορισμός της μερικής λύσεως από τη γενική

Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι πέρα από την πιο πάνω δυνατότητα του απευθείας προσδιορισμού της λύσεως $x_p(t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης **de** υπό τις αρχικές συνθήκες **ics** με άμεση χρήση της εντολής **DSolve**) μια άλλη και τελικά ισοδύναμη δυνατότητα παρέχεται με τη χρήση της γενικής λύσεως που ήδη βρέθηκε

`In[26]:= $x_g[t]$`

`Out[26]= $-\frac{g t^2}{2} + k_1 t + k_2$`

και τον καθορισμό των δύο αυθαίρετων σταθερών $k_{1,2}$ σ' αυτή με τη βοήθεια των συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών

`In[27]:= ics`

`Out[27]= $\{x(0) == x_0, x'(0) == v_0\}$`

Τότε προκύπτει αμέσως το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

`In[28]:= σύστημα = $\{x_g[0] == x_0, (\partial_t x_g[t] /. t \rightarrow 0) == v_0\}$`

`Out[28]= $\{k_2 == x_0, k_1 == v_0\}$`

Αυτό μάλιστα στην εξαιρετικά απλή περίπτωσή μας δε χρειάζεται ιδιαίτερα την εντολή **Solve**, ώστε να μας δώσει τις ζητούμενες συγκεκριμένες τιμές των αρχικά αυθαίρετων σταθερών $k_{1,2}$. Η εντολή αυτή (απόλυτα τετριμμένη εν προκειμένω) παίρνει την μορφή

`In[29]:= σταθερές = Solve[σύστημα, $\{k_1, k_2\}$][[1]]`

`Out[29]= $\{k_2 \rightarrow x_0, k_1 \rightarrow v_0\}$`

Τώρα η γενική λύση $x_g(t)$ μεταπίπτει στη μερική λύση $x_p(t)$

`In[30]:= $\{x_{p1}[t_] = x_g[t] /. σταθερές, x_{p1}[t] == x_p[t]\}$`

`Out[30]= $\left\{-\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0, \text{True}\right\}$`

που έχει ήδη βρεθεί (κατευθείαν με τη χρήση της εντολής **DSolve**) πιο πάνω. Η πρώτη αυτή μέθοδος, δηλαδή χωριστός εξαρχής υπολογισμός της μερικής λύσεως $x_p(t)$ (μέσω της εντολής **DSolve**), όταν η γενική λύση $x_g(t)$ είναι ήδη γνωστή, είναι προφανώς υπολογιστικά δαπανηρή (μέσα στη *Mathematica*), αλλά πρακτικά (προγραμματιστικά) πολύ πιο εύκολη.

Μπορεί να σημειωθεί επίσης ότι από τη θέση (το ύψος) $x_p(t)$ του υλικού σημείου M που ήδη βρέθηκε μπορούμε στη συνέχεια άμεσα (με απλές παραγωγίσεις) να προσδιορίσουμε την ταχύτητά του $v_p(t)$ καθώς και την επιτάχυνσή του $a_p(t)$

`In[31]:= $\{v_p[t_] = \partial_t x_p[t], a_p[t_] = \partial_t v_p[t]\}$`

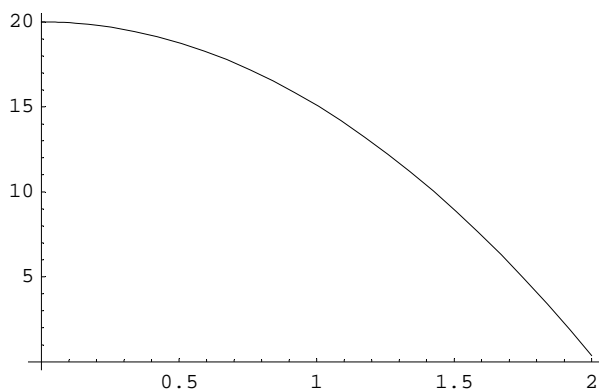
`Out[31]= $\{v_0 - g t, -g\}$`

Από αυτές η ταχύτητα $v_p(t)$ μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο t , ενώ η επιτάχυνση $a_p(t)$ είναι προφανώς σταθερή: $a_p(t) = -g$ στο συγκεκριμένο μηχανικό πρόβλημά μας.

2.6. Γραφική παράσταση της λύσεως

Αν θέλουμε να διανθίσουμε κάπως το κείμενο και τους υπολογισμούς του παρόντος notebook με μια γραφική παράσταση για τη θέση (το ύψος) $x_p(t)$ του υλικού σημείου M , αυτό είναι εξαιρετικά εύκολο με χρήση της εντολής **Plot** για συγκεκριμένες τιμές της επιταχύνσεως της βαρύτητας g και των αρχικών συνθηκών x_0 και v_0 . Αυτό φαίνεται και στο σχήμα:

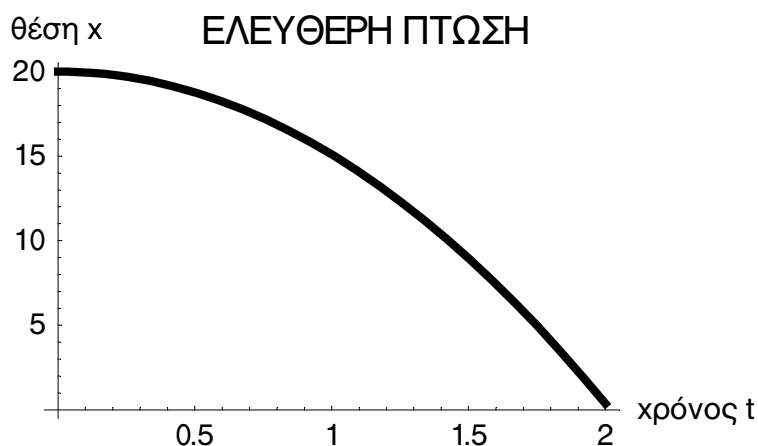
```
In[32]:= Plot[xp[t] /. {g → 9.81, x0 → 20, v0 → 0}, {t, 0, 2}];
```



Μπορούν ασφαλώς να γίνουν διάφορες φυσικές και εύλογες παρατηρήσεις από το σχήμα αυτό, π.χ. ότι το υλικό σημείο M κινείται με ολοένα αυξανόμενη ταχύτητα προς τη γη έχοντας ξεκινήσει (από τη θέση $x_0 = 20$) από κατάσταση ηρεμίας. Παρατηρείται επίσης ότι μετά την πάροδο περίπου 2 sec το υλικό σημείο έχει σχεδόν φθάσει στην επιφάνεια της γης, πράγμα προφανές.

Σε μια πιο επίσημη παρουσίαση της λύσεως αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών το παραπάνω σχήμα θα μπορούσε να γίνει περισσότερο σαφές και εντυπωσιακό ως εξής:

```
In[33]:= Plot[xp[t] /. {g → 9.81, x0 → 20, v0 → 0}, {t, 0, 2},
  DefaultFont → {"MgHelvetica", 14}, ImageSize → 355,
  AxesLabel → {"χρόνος t", "θέση x"}, PlotStyle → {Thickness[0.015]},
  PlotLabel → FontForm[" ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ", {"MgHelvetica", 18}]];
```



Εδώ καθορίσθηκαν η γραμματοσειρά, η MgHelvetica (σε δύο διαφορετικά μεγέθη), ο τίτλος, οι άξονες και το πάχος της γραφικής παραστάσεως. Το ίδιο σχήμα μπορεί να γίνει και πολύ περισσότερο λεπτομερές και εντυπωσιακό από τον αφοσιωμένο και έμπειρο χρήστη της *Mathematica* (που σίγουρα δεν είναι ο γράφων). Παραδείγματος χάρη, μπορούμε να εισαγάγουμε χρώμα, να χρησιμοποιήσουμε άλλες πιο κατάλληλες γραμματοσειρές, κλπ, κλπ. Οι σχετικές λεπτομέρειες ξεφεύγουν από τους στόχους του παρόντος notebook.

2.7. Η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Επιστρέφοντας στο κύριο, στο μαθηματικό μέρος του παρόντος προβλήματος, μπορούμε ασφαλώς να σημειώσουμε και τη δυνατότητα επιλύσεως της αρχικής διαφορικής εξίσωσης **de** με την κλασική μέθοδο επιλύσεως μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $\rho(\mu)$ παίρνει εν προκειμένω την τετριμμένη μορφή $\rho(\mu) = \mu^2$ με διπλή ρίζα το μηδέν, η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\mu^2 = 0$. Άρα η γενική λύση $x_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

```
In[34]:= deh = de[[1]] == 0
```

```
Out[34]= X''(t) == 0
```

είναι απλά της μορφής

```
In[35]:= xh[t_] := k1 t + k2
```

με μερική λύση (partial solution) $x_s(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης **de** π.χ. την

```
In[36]:= xs[t_] := - 1/2 g t^2
```

η οποία είναι η απλούστερη δυνατή. Επομένως η γενική λύση $x_{\text{gen}}(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de** θα είναι το άθροισμα

```
In[37]:= xgen[t_] = xh[t] + xs[t]
```

```
Out[37]= - g t^2 / 2 + k1 t + k2
```

σε απόλυτη συμφωνία με όσα ήδη βρέθηκαν

```
In[38]:= ver2 = xgen[t] == xg[t]
```

```
Out[38]= True
```

2.8. Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace

Προχωρώντας στο παρόν πολύ απλό notebook της *Mathematica*, θα πρέπει ασφαλώς να αναφέρουμε και τη δυνατότητα επιλύσεως του παρόντος στοιχειώδους προβλήματος Κινηματικής-Δυναμικής με την κλασική πια μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Αυτός είναι ένας πολύ γνωστός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ιδιαίτερα χρήσιμος για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η σχετική εντολή της *Mathematica* είναι η εντολή **LaplaceTransform**.

Μετασχηματίζουμε επομένως τη διαφορική εξίσωση **de** κατά Laplace (εννοείται και τα δύο μέλη της ταυτόχρονα). Έτσι προκύπτει

```
In[39]:= It1 = LaplaceTransform[de, t, s]
```

```
Out[39]= LaplaceTransform[x(t), t, s] s^2 - x(0) s - x'(0) == - g/s
```

Η νέα αυτή εξίσωση **It1** είναι πια καθαρά αλγεβρική (χωρίς παραγώγους πλέον), με μεταβλητή το s (όχι πια το χρόνο t) και με άγνωστη συνάρτηση το μετασχηματισμό Laplace $X(s) = L\{x(t)\}$ της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M . Είναι επίσης πρώτου βαθμού. Άρα η επίλυσή της είναι πλήρως τετριμμένη. Έχουμε επομένως τη λύση

```
In[40]:= sol2 = Solve[It1, LaplaceTransform[x[t], t, s]]
```

```
Out[40]= {{LaplaceTransform[x(t), t, s] -> (-g/s + s x(0) + x'(0)) / s^2}}
```

Απομένει τώρα η εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (με τη χρήση της εντολής **InverseLaplaceTransform**) για τον προσδιορισμό της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M από το μετασχηματισμό Laplace της $X(s)$ (δηλαδή με επιστροφή στο χρόνο t). Άρα έχουμε άμεσα

```
In[41]:= xL[t_] = InverseLaplaceTransform[sol2[[1, 1, 2]], s, t]
```

```
Out[41]= -g t^2 / 2 + x'(0) t + x(0)
```

για τη λύση αυτή $x_L(t)$ (με το δείκτη αφιερωμένο στο αρχικό γράμμα L του μετασχηματισμού Laplace που ήδη χρησιμοποιήσαμε). Βρήκαμε και πάλι ουσιαστικά την ίδια ακριβώς λύση στη διαφορική εξίσωσή μας:

```
In[42]:= ver3 = xL[t] == xp[t] /. {x[0] -> x0, x'[0] -> v0}
```

```
Out[42]= True
```

με τις αρχικές συνθήκες $x(0)$ και $x'(0)$ αυθαίρετες (σαν να ήσαν, αν και δεν είναι, τυχαίες σταθερές) ή με δεδομένες αρχικές τιμές x_0 και v_0 αντίστοιχα ανάλογα με την ερμηνεία που δίνει στη λύση αυτή ο χρήστης της μεθόδου. Για να είμαστε λίγο πιο δίκαιοι, η ερμηνεία των δεδομένων αρχικών συνθηκών φαίνεται πολύ πιο λογική (ιδίως όταν χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Laplace, όπου αυτές δηλώνονται ρητά: $x(0)$ και $x'(0)$) και είναι η επικρατούσα. Επομένως σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή η συνάρτηση $x_L(t)$ αποτελεί μάλλον τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών **eqs** = {**de**, **ics**} που έχουμε παρά τη γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης **de** έστω και με τις παρούσες συμβολικές τιμές των αρχικών συνθηκών (initial conditions) **ics**.

Μπορούμε επίσης να τροποποιήσουμε λίγο την παραπάνω λύση. Καταρχήν μπορούμε να δηλώσουμε ρητά στην αλγεβρική εξίσωση **It1** το μετασχηματισμό Laplace $X(s) = L\{x(t)\}$ της λύσεως $x(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de** που ζητάμε να προσδιορίσουμε. Τότε αυτή παίρνει την πιο απλή και ευανάγνωστη μορφή

`In[43]:= It2 = LaplaceTransform[de, t, s] /. LaplaceTransform[x[t], t, s] → X[s]`

$$\text{Out[43]= } X(s) s^2 - x(0) s - x'(0) == -\frac{g}{s}$$

Η μορφή αυτή της αλγεβρικής εξισώσεώς μας μπορεί να γίνει σαφέστερη με την ρητή δήλωση και των αρχικών συνθηκών **ics**, δηλαδή $x(0) = x_0$ και $x'(0) = v_0$, ως εξής:

`In[44]:= It3 = It2 /. {x[0] → x0, x'[0] → v0}`

$$\text{Out[44]= } X(s) s^2 - x_0 s - v_0 == -\frac{g}{s}$$

Λύνοντας τώρα ως προς $X(s)$, βρίσκουμε

`In[45]:= sol3 = Solve[It3, X[s]]`

$$\text{Out[45]= } \left\{ \left\{ X(s) \rightarrow \frac{-\frac{g}{s} + v_0 + s x_0}{s^2} \right\} \right\}$$

και τελικά για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που ζητούμε (μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως **de**)

`In[46]:= xLp[t_] = InverseLaplaceTransform[sol3[[1, 1, 2]], s, t]`

$$\text{Out[46]= } -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

απολύτως ανάλογα με προηγουμένως, γιατί προφανώς

`In[47]:= ver4 = xp[t] == xLp[t]`

`Out[47]= True`

Ασφαλώς τα δύο τελευταία βήματα της λύσεως μπορούν να συνδυασθούν επίσης σε ένα

`In[48]:= xLp[t_] = InverseLaplaceTransform[Solve[It3, X[s]][[1, 1, 2]], s, t]`

$$\text{Out[48]= } -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

για την εύρεση της λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών που ζητάμε. Σημειώνεται τέλος ότι, επειδή οι αρχικές συνθήκες **ics** είναι ήδη γνωστές

`In[49]:= ics`

`Out[49]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}`

η εντολή ευρέσεως της τελικής αλγεβρικής εξισώσεως (πρωτοβάθμιου πολυωνύμου **It3** ως προς $X(s)$) θα μπορούσε να είχε και την εξής εναλλακτική απλοποιημένη μορφή:

`In[50]:= It3 = It2 /. (ics /. Equal → Rule)`

$$\text{Out[50]= } X(s) s^2 - x_0 s - v_0 == -\frac{g}{s}$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica* για animations, δηλαδή για τη δημιουργία κινήσεως σε σχήματα (ή κινούμενων σχημάτων). Αυτά τα notebooks για animations μας δείχνουν πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η *Mathematica* για τη δημιουργία animations. Τα τελικά αρχεία που δημιουργεί η *Mathematica* είναι αρχεία τύπου animated gif. Αυτά μπορούν εύκολα να εμφανισθούν σαν κινούμενα σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή μέσω των *Windows*. Υπάρχει επίσης και η δυνατότητα να αναρτηθούν στο διαδίκτυο (internet) για ανάλογη εμφάνιση σε οποιοδήποτε υπολογιστή συνδεδεμένο στο διαδίκτυο.

Τα δύο αυτά notebooks αφορούν σε εφαρμογές που σχετίζονται άμεσα με την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ειδικότερα με τις Ταλαντώσεις: εδώ ενός μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου και ενός μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Βασίζονται στα αποτελέσματα της επιλύσεως των σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αυτά τα δύο notebooks είναι τα εξής:

• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS

1. *Notebook για Animations: Animations-MassSpringVibrations: Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μηχανικού Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου* (8 σελίδες)

Περιληψη του notebook: Στο notebook αυτό μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο των ελεύθερων ταλαντώσεων του κλασικού μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου με ιδιοσυχνότητα ω_0 . Πρώτα αναφέρεται η σχετική διαφορική εξίσωση και προσδιορίζεται η γενική λύση της. Στη συνέχεια προστίθενται και αρχικές συνθήκες (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου) και ξαναλύεται η ίδια διαφορική εξίσωση με γραφική παράσταση της λύσεως στην ειδική περίπτωση μηδενικής αρχικής θέσεως. Μετά το εισαγωγικό αυτό μέρος ακολουθεί το κύριο μέρος του notebook. Αυτό περιλαμβάνει τη σχεδίαση του ελατηρίου, της στερεώσεως του αριστερού άκρου του και της μάζας στο δεξιό άκρο του με το ελατήριο και τη μάζα σαν συναρτήσεις του χρόνου t . Όλα αυτά μαζί δημιουργούν το σχετικό σχήμα (κι αυτό βέβαια σαν συνάρτηση του χρόνου t) που σχεδιάζεται για ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$ (δηλαδή για περίοδο $T = 2\pi$) σε μια ακολουθία σχημάτων από $t = 0$ μέχρι και $t = 2\pi - (\pi/8)$ ανά $\pi/8$. Δημιουργούμε έτσι 16 σχήματα που δείχνουν ποια ακριβώς μορφή παίρνει το μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε (εννοείται για τις τιμές των σταθερών που επιλέξαμε). Τα σχήματα αυτά παρουσιάζονται εδώ στο χαρτί. Στον υπολογιστή όμως με βάση τα σχήματα αυτά δημιουργείται άμεσα η σχετική animation (το σχετικό κινούμενο σχήμα) πάνω στην οθόνη για τις ελεύθερες ταλαντώσεις του παρόντος μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου. Την animation αυτή μπορούμε άμεσα να την «εξαγάγουμε» από τη *Mathematica* και να την κάνουμε απόλυτα ανεξάρτητη από αυτή σ' ένα αρχείο gif. Αυτό μπορεί να είναι διαθέσιμο οπουδήποτε χωρίς να έχει ανάγκη τη διαθεσιμότητα της *Mathematica*. Στην επόμενη ενότητα του notebook τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται στην περίπτωση υπάρξεως και αποσβέσεως με λόγο αποσβέσεως $\xi = 0.2$ ξανά για $\omega_0 = 1$. Τώρα όμως με την απόσβεση των ταλαντώσεων το φαινόμενο δεν είναι πια περιοδικό, αλλά σβήνει λίγο-λίγο με το χρόνο. Το ενδιαφέρον πάντως είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις ταλαντώσεων (τόσο χωρίς απόσβεση όσο και με απόσβεση) έχουμε μια πλήρη εικόνα του συστήματος μάζας-ελατηρίου παρόμοια με το πραγματικό μηχανικό σύστημα σε κίνηση (το κινούμενο σχήμα).

2. Notebook για Animations: Animations–BuildingVibrations: Ταλαντώσεις Μονώροφου Κτιρίου (20 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Σαν συνέχεια του προηγούμενου notebook στο notebook αυτό και πάλι μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το ακόμη πιο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο των ταλαντώσεων ενός μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως με δύο υποστυλώματα. Κατ' αρχήν στο πρόβλημα αυτό λύνεται η διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού για ένα υποστυλώμα πακτωμένο στα δύο άκρα του, αλλ' επιτρέποντας κάθετες μετατοπίσεις στα άκρα αυτά και όχι με βάση την κλασική πάκτωση. Αυτό ακριβώς συμβαίνει στα υποστυλώματα του μονώροφου κτιρίου που εξετάζεται εδώ. Στη συνέχεια λύνονται οι διαφορικές εξισώσεις για τις ταλαντώσεις της πλάκας του μονώροφου κτιρίου πρώτα για ελεύθερες ταλαντώσεις και μετά και για ταλαντώσεις που οφείλονται σε ημιτονική κίνηση του εδάφους, π.χ. σε έναν υπεραπλοποιημένο σεισμό. Θεωρούνται και οι δύο περιπτώσεις υπάρξεως και μη υπάρξεως αποσβέσεως. Τέλος θεωρείται και η ειδική περίπτωση του συντονισμού, όπου η συχνότητα της παρούσας υπεραπλοποιημένης σεισμικής καταπονήσεως συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του μονώροφου κτιρίου. Μετά το εισαγωγικό αυτό μέρος με τις επιλύσεις των διαφορικών εξισώσεων ακολουθεί το κύριο μέρος του notebook με τις animations. Σ' αυτό ανάλογα και με το προηγούμενο notebook δημιουργούνται οι σχετικές animations που δείχνουν πώς ακριβώς κινείται το παρόν μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. (α) Πρώτα για ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση και χωρίς σεισμική φόρτιση. (β) Μετά για ταλάντωση που οφείλεται σε ημιτονική σεισμική φόρτιση (με κίνηση εδώ και του εδάφους, όχι μόνο της πλάκας του κτιρίου) και πάλι χωρίς απόσβεση. (γ) Στη συνέχεια για όμοια σεισμική φόρτιση, αλλά τώρα και με συντονισμό. (δ) Τέλος για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς σεισμική φόρτιση, αλλά με απόσβεση. Είναι προφανές ότι οι δύο πρώτες από τις animations αυτές αφορούν σε περιοδικά φαινόμενα, ενώ οι δύο τελευταίες (αυτές με συντονισμό και με απόσβεση αντίστοιχα) σε μη περιοδικά. Εδώ βέβαια όλα τα σχετικά σχήματα που παριστάνουν το μονώροφο κτίριο (έδαφος, υποστυλώματα και πλάκα) παρουσιάζονται, όπως ακριβώς και στο προηγούμενο notebook, στο χαρτί. Στον υπολογιστή όμως με βάση τα σχήματα αυτά δημιουργούνται άμεσα οι σχετικές animations (τα σχετικά κινούμενα σχήματα) πάνω στην οθόνη για τις ταλαντώσεις που αναφέραμε του παρόντος μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Τις animations αυτές μπορούμε (όπως και πριν) άμεσα να τις «εξαγάγουμε» από τη *Mathematica* και να τις κάνουμε απόλυτα ανεξάρτητες από αυτή σε αρχεία gif (εδώ δημιουργούμε τέσσερα σχετικά αρχεία). Αυτά μπορούν να είναι διαθέσιμα οπουδήποτε χωρίς να έχουν ανάγκη τη διαθεσιμότητα της *Mathematica*. Και στις τέσσερις περιπτώσεις που εξετάσαμε έχουμε μια πλήρη και αρκετά ακριβή εικόνα του κτιρίου που ταλαντώνεται παρόμοια με το αντίστοιχο πραγματικό κτίριο.

Η παρουσία εδώ αυτών των δύο notebooks για animations (κίνηση σε σχήματα, κινούμενα σχήματα) ελπίζεται ότι θα επιτρέψει τη χρήση των animations μέσω της *Mathematica* από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την προετοιμασία και **των δικών του/των δικών της** animations στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα. Οι animations προσφέρουν μια θαυμάσια δυνατότητα οπτικής κατανοήσεως ενός φαινομένου συνήθως (όχι όμως και κατ' ανάγκη) δυναμικού.

Από την άλλη πλευρά η *Mathematica* προσφέρει τη δυνατότητα εκτελέσεως των αναλυτικών και αριθμητικών υπολογισμών που απαιτούνται σε ένα πρόβλημα, αλλά και της δημιουργίας της animation για το «ζωντάνεμα» των τελικών αποτελεσμάτων. Τα παρόντα δύο notebooks για animations αποτελούν παραδείγματα της σχετικής διαδικασίας. Αυτή ξεκινάει από τους υπολογισμούς (αναλυτικούς και αριθμητικούς), προχωράει στις αναγκαίες γραφικές παραστάσεις που θα ενσωματωθούν στην animation και φθάνει τέλος στη δημιουργία του σχετικού με την animation αρχείου τύπου gif, καλύτερα animated gif. Αυτό μάλιστα το αρχείο είναι εντελώς ανεξάρτητο από τη *Mathematica* που, όπως αναφέρθηκε, δε χρειάζεται καθόλου για την εμφάνιση του αρχείου gif στην οθόνη του υπολογιστή. Η διαθεσιμότητα του λειτουργικού συστήματος, συνήθως των *Windows*, αρκεί!

■ Notebook Animations-MassSpringVibrations

ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

■ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ

Στο notebook αυτό εξετάζουμε το γνωστό μας μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς φυσικά φόρτιση ή εξωτερική δύναμη $p(t)$ και αρχικά χωρίς απόσβεση. Η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου (της μάζας m) ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$ δίνεται στη μεθεπόμενη εντολή. (Η πρώτη πιο κάτω εντολή αφορά απλά στη μη εμφάνιση ορισμένων πιθανών ορθογραφικών λαθών.)

```
In[1] := Off[General::spell1]
```

```
In[2] := MassSpringODE = u''[t] + ω0^2 u[t] == 0
```

```
Out[2] = u(t) ω0^2 + u''(t) == 0
```

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ τη σχετική ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα, εννοείται για τον Πολιτικό Μηχανικό φυσική κυκλική συχνότητα). Η γενική λύση αυτής της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως είναι

```
In[3] := GeneralSolution = DSolve[MassSpringODE, u[t], t]
```

```
Out[3] = {{u(t) -> c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)}}
```

και η αντίστοιχη συνάρτηση είναι

```
In[4] := ug[t_] = GeneralSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[4] = c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)
```

όπως ήδη γνωρίζουμε και μπορούμε μάλιστα να επαληθεύσουμε

```
In[5] := verg = MassSpringODE /. u -> ug // Simplify
```

```
Out[5] = True
```

Θεωρούμε τώρα και τις αρχικές συνθήκες (initial conditions), αρχική θέση και αρχική ταχύτητα, για $t = 0$:

```
In[6] := InitialConditions = {u[0] == u0, u'[0] == v0};
```

Τώρα βρίσκουμε εύκολα τη σχετική μερική λύση (ή ειδική λύση) καθώς και την αντίστοιχη συνάρτηση

```
In[7] := PartialSolution = DSolve[{MassSpringODE, InitialConditions}, u[t], t]
```

```
Out[7] = {{u(t) -> (u0 ω0 cos(t ω0) + v0 sin(t ω0)) / ω0}}
```

```
In[8]:= up[t_] = PartialSolution[[1, 1, 2]] // Apart
```

```
Out[8]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 
```

που κι αυτή επαληθεύεται τόσο ως προς τη διαφορική εξίσωση όσο και ως προς τις αρχικές συνθήκες

```
In[9]:= verp = {MassSpringODE, InitialConditions} /. u → up // Simplify
```

```
Out[9]= {True, {True, True}}
```

Για τις συγκεκριμένες τιμές

```
In[10]:= values = {ω0 → 1, u0 → 0, v0 → 10};
```

η λύση μας παίρνει τώρα την ακόλουθη πάρα πολύ απλή μορφή (πρόκειται για ημιτονική συνάρτηση):

```
In[11]:= uv[t_] = up[t] /. values
```

```
Out[11]= 10 sin(t)
```

Να και η γραφική παράσταση της λύσεως αυτής $u_v(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, 7\pi]$.

```
In[12]:= Plot[uv[t], {t, 0, 7 π}, PlotStyle → Thickness[0.01], PlotRange → {-10, 10},
  AxesLabel → {"u", ""}, PlotLabel → "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ",
  DefaultFont → {"Arial-Bold", 12}, Frame → True, ImageSize → 360];
```



■ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ANIMATION (ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ)

Θα προχωρήσουμε τώρα στη δημιουργία της animation (ενός σχήματος που κινείται, ενός κινούμενου σχήματος) για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα και με τις ίδιες τιμές **values** των σταθερών. Προς το σκοπό αυτό υποθέτουμε το ελατήριο μήκους $L = 20$ (σε cm). Το αριστερό άκρο του ελατηρίου είναι φυσικά στερεωμένο, ενώ το δεξιό άκρο του είναι συνδεδεμένο με τη μάζα m . Υπό αυτές τις συνθήκες η θέση $x_v(t)$ της μάζας m ως προς την αρχή $x = 0$ του άξονα x και η μετατόπισή της $u_v(t)$ ως προς τη θέση ισορροπίας της διαφέρουν κατά το μήκος $L = 20$ του ελατηρίου. Συγκεκριμένα

```
In[13]:= L = 20; xv[t_] := L + uv[t]
```

Πρέπει τώρα να σχεδιάσουμε το ελατήριο. Αυτό το πετυχαίνουμε ξεκινώντας με την εντολή καθορισμού των γωνιακών σημείων του (των κορυφών των γωνιών του) σε λίστα

```
In[14]:= Spring1[t_] := Table[{(2 k - 1) / 40} xv[t], 0.1 (1 + (-1)k)}, {k, 1, 20}] // Expand // N;
```

Στη συνέχεια προσθέτουμε (από αριστερά) στη λίστα αυτή το αριστερό άκρο του ελατηρίου [0, 0.1]

```
In[15]:= Spring2[t_] := Prepend[Spring1[t], {0, 0.1}]
```

και στο τέλος προσθέτουμε (από δεξιά, σαν τελευταίο στοιχείο της λίστας) και το δεξιό άκρο του ίδιου ελατηρίου ($x_v(t)$, 0.1). Τώρα βρίσκουμε εύκολα τη σχετική μερική (ή ειδική) λύση και την αντίστοιχη συνάρτηση, που μετακινείται βέβαια μαζί με τη μάζα m . Προκύπτει έτσι η τελική λίστα

```
In[16]:= Spring[t_] := Append[Spring2[t], {xv[t], 0.1}]; Spring[t] // OutputForm
```

```
Out[16]//OutputForm=
```

```
{0, 0.1}, {0.5 + 0.25 Sin[t], 0.}, {1.5 + 0.75 Sin[t], 0.2},
{2.5 + 1.25 Sin[t], 0.}, {3.5 + 1.75 Sin[t], 0.2},
{4.5 + 2.25 Sin[t], 0.}, {5.5 + 2.75 Sin[t], 0.2},
{6.5 + 3.25 Sin[t], 0.}, {7.5 + 3.75 Sin[t], 0.2},
{8.5 + 4.25 Sin[t], 0.}, {9.5 + 4.75 Sin[t], 0.2},
{10.5 + 5.25 Sin[t], 0.}, {11.5 + 5.75 Sin[t], 0.2},
{12.5 + 6.25 Sin[t], 0.}, {13.5 + 6.75 Sin[t], 0.2},
{14.5 + 7.25 Sin[t], 0.}, {15.5 + 7.75 Sin[t], 0.2},
{16.5 + 8.25 Sin[t], 0.}, {17.5 + 8.75 Sin[t], 0.2},
{18.5 + 9.25 Sin[t], 0.}, {19.5 + 9.75 Sin[t], 0.2},
{20 + 10 Sin[t], 0.1}}
```

(Μία μόνο εντολή αρκούσε. Εντούτοις χρησιμοποιήσαμε τρεις εντολές απλά για εκπαιδευτικούς λόγους.) Σχεδιάζουμε τώρα ένα πολύ μικρό ορθογώνιο για την αριστερή σταθερή στήριξη του ελατηρίου

```
In[17]:= Pin = Graphics[Rectangle[{-0.4, 0.07}, {0.4, 0.13}]];
```

και ένα μεγάλο ορθογώνιο για τη μάζα m (που κινείται βέβαια) του παρόντος μηχανικού συστήματος

```
In[18]:= Mass[t_] := Graphics[Rectangle[{xv[t], 0}, {xv[t] + 3, 0.2}]];
```

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δημιουργήσουμε την ακολουθία των σχημάτων της παρούσας animation. Για το σκοπό αυτό στο ίδιο σχήμα θέτουμε το μικρό ορθογώνιο **Pin** της αριστερής στηρίξεως του ελατηρίου, τη μάζα **Mass[t]** και το ίδιο το ελατήριο **Spring[t]**. Όλο αυτό το σχήμα θα το δημιουργήσουμε με τη χρήση της εντολής **Table** και μάλιστα 16 φορές στο χρονικό διάστημα [0, 2π] ανά π/8. Θα παραλείψουμε βέβαια το τελευταίο σχήμα (για $t = 2π$), επειδή αυτό συμπίπτει με το πρώτο σχήμα (για $t = 0$) και επομένως όχι μόνο θα είναι άχρηστο, αλλά και βλαβερό στην animation την οποία φτειαίνουμε. Δημιουργούμε έτσι μια ακολουθία σχημάτων **VibrationWithoutDampingImages**. Αυτό το πετυχαίνουμε με τρεις εντολές. Η πρώτη εντολή αφορά στο σχήμα που φτειαίνουμε μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t και είναι σε μορφή συναρτήσεως του χρόνου t . Έτσι θα μπορούμε να την καλούμε όποια χρονική στιγμή t εμείς θέλουμε.

```
In[19]:= image[t_] := Show[Pin, Mass[t], ListPlot[Spring[t], PlotJoined → True,
PlotStyle → {Thickness[0.012], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity],
AspectRatio → 0.15, PlotRange → {{0, 35}, {-0.1, 0.35}}, Axes → True,
AxesLabel → {"x", ""}, Ticks → {{0, 10, 20, 30}, {-0.1, 0.1, 0.3}},
DefaultFont → {"Arial-Bold", 14}, Background → Hue[0.15],
ImageSize → 560, PlotLabel → label]
```

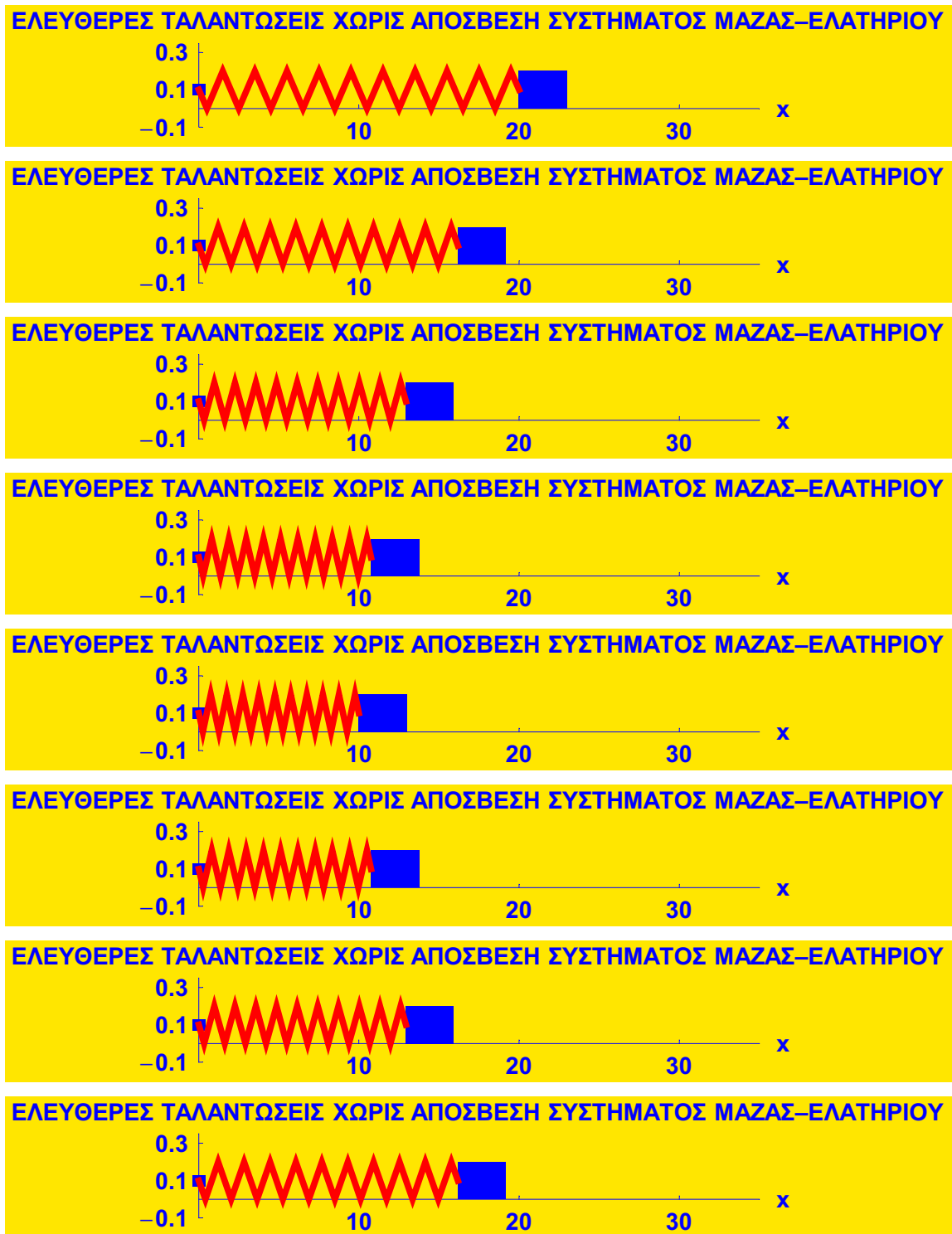
Η δεύτερη εντολή αφορά στον τίτλο της γραφικής παραστάσεως (για κάθε χρονική στιγμή t):

```
In[20]:= label = "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ";
```

Τέλος η τρίτη εντολή δημιουργεί την ακολουθία των σχημάτων τα οποία θέλουμε στην animation που φτειαχνουμε με την εντολή **Table** και με επανειλημμένες κλήσεις σ' αυτήν (ανά χρονικά διαστήματα $\pi/8$) της συναρτήσεως **image[t]** που ήδη ορίσαμε. (Παρενθετικά σημειώνουμε ότι οι τρεις πιο πάνω εντολές θα μπορούσαν εύκολα να είχαν συνδυασθεί σε μία μόνο εντολή. Αυτό όμως δε μας εξυπηρετεί εδώ.)

```
In[21]:= VibrationWithoutDampingImages = Table[image[t], {t, 0, 2 π - π / 8, π / 8}];
```





`In[22] := Length[VibrationWithoutDampingImages]`

`Out[22]= 16`

(Δηλαδή έχουμε 16 συνολικά σχήματα.) Τώρα για να δούμε στ' αλήθεια την animation μας, θα πρέπει να "σημαδέσουμε" όλα αυτά τα σχήματα με πάτημα του ποντικιού δεξιά σε μία από τις δύο σχετικές κατακόρυφες μπλε γραμμές που περιέχουν τα σχήματα αυτά (και κανένα άλλο σχήμα!), ώστε να μαυρίσουν. Στη συνέχεια πατάμε **Ctrl Y** (από το πληκτρολόγιο) ή εναλλακτικά **Cell → Animate Selected Graphics**

(από τις επιλογές, τα menus). Έτσι παρατηρούμε την κίνηση του μηχανικού συστήματός μας υλικού σημείου-ελατηρίου στις παρούσες χωρίς απόσβεση ελεύθερες ταλαντώσεις του σαν μια πολύ μικρή ταινία.

Το τελικό βήμα μας είναι βέβαια η δημιουργία και του σχετικού αρχείου **gif** ή **GIF** (αρχικά των λέξεων της φράσεως Graphics Interchange File). Αυτή επιτυγχάνεται, όπως ξέρουμε, με την εντολή **Export** ως εξής:

```
In[23] := Export["D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithoutDamping.gif",
  VibrationWithoutDampingImages, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[23] = D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithoutDamping.gif
```

Το όνομα του αρχείου είναι αυθαίρετο, αρκεί να τελειώνει σε **gif**. Το ίδιο και το directory αποθηκεύσεώς του, αρκεί να υπάρχει και να μας διευκολύνει στη δουλειά μας, εδώ με τις animations. Τα σχήματά μας είναι εδώ τα σχήματα **VibrationWithoutDampingImages**, τα οποία μόλις δημιουργήσαμε. Το σημαντικό όμως είναι να μη λησμονήσουμε την επιλογή **ConversionOptions -> {Loop -> True}** στο τέλος της εντολής **Export**. Τώρα, κάθε φορά που επιθυμούμε, πατώντας το ποντίκι πάνω στο αρχείο **gif** που δημιουργήσαμε, δηλαδή στο αρχείο **MassSpringVibrationWithoutDamping.gif**, παρατηρούμε το σχετικό κινούμενο σχήμα, την animation για τις ιδιοταλαντώσεις του μηχανικού συστήματός μας υλικού σημείου-ελατηρίου ή μάζας-ελατηρίου (χωρίς απόσβεση) χωρίς να έχουμε ανοίξει τη *Mathematica*. Πρόκειται για μια απόλυτα αυτοδύναμη animation. Δε χρειάζεται τη *Mathematica*. Μπορούμε να τη στείλουμε και σε τρίτους που δεν έχουν καθόλου *Mathematica*, για να τη δούν στον υπολογιστή τους, ή πιο απλά να τη βάλουμε στο διαδίκτυο, π.χ. στην ιστοσελίδα του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.

■ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ

Συνεχίζουμε να εξετάζουμε το γνωστό μας μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς φυσικά φόρτιση ή εξωτερική δύναμη $p(t)$, αλλά τώρα με απόσβεση των ταλαντώσεων, παρόλο που δε θα δείξουμε στα σχήματα της animation τον αποσβεστήρα. Η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου (της μάζας m) ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$ δίνεται στην επόμενη εντολή:

```
In[24] := MassSpringODE = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω0^2 u[t] == 0 /. {ξ -> 0.2, ω0 -> 1}
```

```
Out[24] = u(t) + 0.4 u'(t) + u''(t) == 0
```

με $\xi = 0.2$ το σχετικό λόγο αποσβέσεως και $\omega_0 = 1$ τη σχετική ιδιοσυχνότητα. Θεωρούμε τώρα και τις ίδιες αρχικές συνθήκες **InitialConditions** όπως και πριν. Τώρα βρίσκουμε και πάλι εύκολα τη σχετική μερική λύση (ή ειδική λύση) και την αντίστοιχη συνάρτηση

```
In[25] := PartialSolution = DSolve[{MassSpringODE, InitialConditions}, u[t], t] // Simplify
```

```
Out[25] = {{u(t) -> e^{-0.2t} (1. u0 cos(0.979796 t) + (0.204124 u0 + 1.02062 v0) sin(0.979796 t))}}
```

```
In[26] := up[t_] = PartialSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[26] = e^{-0.2t} (1. u0 cos(0.979796 t) + (0.204124 u0 + 1.02062 v0) sin(0.979796 t))
```

Για τις συγκεκριμένες τιμές **values** που ήδη ορίσαμε η λύση μας παίρνει τώρα μια αρκετά απλή μορφή, όπου όμως βέβαια συνεχίζει να υπεισέρχεται και ο λόγος αποσβέσεως $\xi = 0.2$:

```
In[27]:= uv[t_] = up[t] /. values
```

```
Out[27]= 10.2062 e-0.2t sin(0.979796 t)
```

Να και η γραφική παράσταση της λύσεως αυτής $u_v(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, 7\pi]$:

```
In[28]:= Plot[uv[t], {t, 0, 7 π}, PlotStyle → Thickness[0.01], PlotRange → {-10, 10},
  AxesLabel → {"u", ""}, PlotLabel → "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ",
  DefaultFont → {"Arial-Bold", 12}, Frame → True, ImageSize → 360];
```



Παρατηρούμε ότι η παρούσα γραφική παράσταση για ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση (με $\xi = 0.2$), διαφέρει έντονα από την αντίστοιχη προηγούμενη γραφική παράσταση για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με $\xi = 0$) στο κατά τα άλλα ίδιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (ή μάζας)–ελατηρίου.

■ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ANIMATION (ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ)

Θα προχωρήσουμε τώρα στη δημιουργία της animation ακριβώς όπως και πριν. Προς το σκοπό αυτό υποθέτουμε το ελατήριο το ίδιο όπως προηγουμένως και έχουμε ήδη διαθέσιμη τη σχετική συνάρτηση **Spring[t]**. Έχουμε επίσης διαθέσιμα το μικρό ορθογώνιο **Pin** για τη στήριξη στο αριστερό άκρο του ελατηρίου και τη μάζα **Mass[t]** για το υλικό σημείο (τη μάζα) στο δεξιό άκρο του ελατηρίου. (Εδώ αμελούμε τη σχεδίαση του αποσβεστήρα.) Δημιουργούμε τη λίστα των σχημάτων της animation με τις δύο εντολές

```
In[29]:= label = "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ";
```

```
In[30]:= VibrationWithDampingImages = Table[image[t], {t, 0, 15, 1.2}];
```





```
In[31]:= atn = Show[Graphics[Text["ΞΑΝΑΡΧΙΖΕΙ Η ANIMATION", {0, 0}], DefaultColor -> Hue[0.4],
  DefaultFont -> {"Arial-Bold", 35}, AspectRatio -> 0.1, ImageSize -> 500]];
```

ΞΑΝΑΡΧΙΖΕΙ Η ANIMATION

(Στην έντυπη και στην PDF μορφή του notebook παραλείφθηκαν τα 6 τελευταία σχήματα πάνω από την προειδοποίηση.) Παρατηρούμε ότι η ταλάντωση τείνει να αποσβεσθεί στα δύο τελευταία σχήματα. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του λόγου αποσβέσεως $\xi = 0.2$. Σημειώνουμε επίσης ότι έχουμε 13 συνολικά σχήματα:

```
In[32]:= Length[VibrationWithDampingImages]
```

```
Out[32]= 13
```

Όπως και πριν, για να δούμε τώρα στ' αλήθεια την animation μας, θα πρέπει να "σημαδέσουμε" όλα αυτά τα σχήματα πατώντας το ποντίκι δεξιά σε μία από τις δύο σχετικές κατακόρυφες μπλε γραμμές που περιέχουν τα σχήματα αυτά (και κανένα άλλο σχήμα!), ώστε να μαυρίσουν. Στη συνέχεια πατάμε **Ctrl Y** ή εναλλακτικά **Cell -> Animate Selected Graphics**. Έτσι παρατηρούμε την κίνηση του μηχανικού συστήματός μας στις παρούσες ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση. Τελικά δημιουργούμε και το σχετικό αρχείο **gif**, πάλι ακριβώς όπως και πριν με τη χρήση της εντολής **Export**. Αυτό είναι χρήσιμο και μόνο του!

```
In[33]:= Export["D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithDamping.gif",
  {VibrationWithDampingImages, atn}, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[33]= D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithDamping.gif
```