

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc, \quad \frac{c(x, t)}{c_0} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ

ΓΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + D \frac{\partial p}{\partial t^2} = \frac{p(x, y, t)}{D}$$

$$c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp \left[-\frac{(x - Vt - \xi)^2}{4Dt} \right] d\xi$$

Τεύχος 1

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t), \quad EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t)$$

Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \mathbf{V} = -k \operatorname{grad} h$$

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

⇓

$$\nabla^2 \Phi = 0$$



$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t J(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L}\{J(t)\} \mathcal{L}\{Y(t)\} = \frac{1}{1 - J(s)}$$

Νικόλαος Ι. Ιωακείμης

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

$$\oint_C \Omega'(z) dz = \Gamma + iQ$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	vii-viii
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ	ix-x
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	xi-xii
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ	1-34
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 34 σελίδες)</i>	1
B1.1. Βασικές Έννοιες	2
B1.2. Βασικοί Χαρακτηρισμοί	7
B1.3. Τύποι Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων Δευτέρας Τάξεως	15
B1.4. Αρχή της Υπερθέσεως (ή Επαλληλίας) Λύσεων	19
B1.5. Γενική Λύση της Μη Ομογενούς Γραμμικής Διαφορικής Εξισώσεως	22
B1.6. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες	23
B1.7. Λύσεις Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	26
B1.8. Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	27
B1.9. Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	29
B1.10. Μη Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους	32
B1.11. Αλλαγή Ανεξάρτητων Μεταβλητών	32
B1.12. Αλλαγή Άγνωστης Συναρτήσεως	33
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ	35-54
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	35
B2.1. Οι Βασικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως για τον Πολιτικό Μηχανικό	36
B2.2. Οι Βασικές Εξισώσεις Τετάρτης Τάξεως για τον Πολιτικό Μηχανικό	50
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β3: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ	55-92
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 38 σελίδες)</i>	55
B3.1. Η Τασική Συνάρτηση του Airy στην Επίπεδη Ελαστικότητα	56
B3.2. Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	64
B3.3. Ιδεατό Ρευστό στη Ρευστομηχανική	76
B3.4. Μόνιμη Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού	81
B3.5. Κυκλοφοριακή Ροή σε Αυτοκινητόδρομο	88
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β4: ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	93-114
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 22 σελίδες)</i>	93
B4.1. Εξίσωση της Χορδής: Λύση του d'Alembert	93
B4.2. Εφαρμογή στη Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace	99
B4.3. Γενική Λύση για Ειδικές Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως	101
B4.4. Γενική Λύση για Ειδικές Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως	105
B4.5. Η Μέθοδος της Εκθετικής Αντικαταστάσεως	110
B4.6. Γενική Λύση της Διδιάστατης Διαρμονικής Εξισώσεως Μέσω Δύο Αρμονικών Συναρτήσεων	112

●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β5: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	115–162
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 48 σελίδες)</i>	115
	B5.1. Γενικά για τη Μέθοδο του Χωρισμού των Μεταβλητών	116
	B5.2. Εφαρμογή στη Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος	117
	B5.3. Εφαρμογή στη Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως	130
	B5.4. Εφαρμογή στη Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace	137
	B5.5. Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	150
	B5.6. Μη Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις	154
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β6: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ ΚΑΙ ΔΟΚΩΝ	163–212
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 50 σελίδες)</i>	163
	B6.1. Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	164
	B6.2. Καμπτικές Ταλαντώσεις Δοκού	181
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β7: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ	213–218
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	213
	B7.1. Η Μέθοδος του Navier για την Ορθογωνική Πλάκα	213
	B7.2. Η Μέθοδος του Lévy για την Ορθογωνική Πλάκα	218
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β8: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ	219–224
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	219
	B8.1. Στερεοποίηση Ημιπεριορισμένου (Ημίκλειστου) Στρώματος Αργίλου	219
	B8.2. Στερεοποίηση Ανοικτού Στρώματος Αργίλου	224
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β9: ΠΟΛΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ	225–244
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	225
	B9.1. Τύποι Μετασχηματισμών Μεταξύ των Συντεταγμένων	225
	B9.2. Η Εξίσωση του Laplace σε Πολικές Συντεταγμένες	226
	B9.3. Η Εξίσωση του Laplace σε Κυλινδρικές και σε Σφαιρικές Συντεταγμένες	231
	B9.4. Επίλυση της Εξίσωσης του Laplace σε Πολικές Συντεταγμένες	233
	B9.5. Ροή γύρω από Ακίνητο Κυκλικό Κύλινδρο	238
	B9.6. Χρήση Συναρτήσεων Bessel στη Διδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως	240
	B9.7. Χρήση Συναρτήσεων Bessel στις Ιδιοταλαντώσεις Κυκλικής Πλάκας	242
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β10: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE	245–274
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 30 σελίδες)</i>	245
	B10.1. Σύντομη Περιγραφή της Μεθόδου	246
	B10.2. Μεταγωγή Ρύπου σε Υδατόρρευμα	249
	B10.3. Σχόλια για τη Χρήση του Μετασχηματισμού Laplace	259
	B10.4. Μετάδοση Θερμότητας στο Έδαφος	262
	B10.5. Ελεύθερες Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	269
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β11: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER	275–292
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	275
	B11.1. Σύντομη Περιγραφή της Μεθόδου	276
	B11.2. Διάχυση Ρύπου σε Υδατόρρευμα	282
	B11.3. Ελεύθερες Καμπτικές Ταλαντώσεις Άπειρης Δοκού	288
●	ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β12: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	293–298
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	293
	B12.1. Η Μέθοδος των Rayleigh–Ritz	293
	B12.2. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών	297
●	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (2 σελίδες)	299–300

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ ΚΑΙ ΔΟΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό επιδεικνύεται η χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στην επίλυση προβλημάτων αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων σε συνήθεις ράβδους καθώς και προβλημάτων καμπτικών ταλαντώσεων σε συνήθεις δοκούς. (Ανάλογες με τις αξονικές ταλαντώσεις σε ράβδους είναι και οι στρεπτικές ταλαντώσεις.) Και οι ράβδοι και οι δοκοί αποτελούν γραμμικούς φορείς στην ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού. Χρησιμοποιούμε εδώ τον όρο ράβδος στην περίπτωση των αξονικών ταλαντώσεων (αξονική καταπόνηση) ή/και των στρεπτικών ταλαντώσεων (στρεπτική καταπόνηση). Τη χρήση του όρου δοκός την περιορίζουμε στην περίπτωση καμπτικών ταλαντώσεων (καμπτική καταπόνηση) και σχετικών σύνθετων δυναμικών καταπονήσεων.

Η μέθοδος που εφαρμόζεται τόσο στις αξονικές όσο και στις καμπτικές ταλαντώσεις είναι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή ήδη εξηγήθηκε λεπτομερώς στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5. Στο ίδιο κεφάλαιο έγινε μάλιστα και επίδειξη της στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, που είναι δευτέρας τάξεως και διέπει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδών και καλωδίων. Η ίδια εξίσωση ισχύει και στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδων, που εξετάζονται στο κεφάλαιο αυτό. Αντίθετα για τις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών η διαφορική εξίσωση είναι τετάρτης τάξεως.

Το παρόν κεφάλαιο δεν αποτελείται απλά μόνο από εφαρμογές της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και της υπερθέσεως (επαλληλίας) των σχετικών μερικών λύσεων. Δίνεται επίσης έμφαση στις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου ή της δοκού, στις σχετικές ιδιοσυχνότητες, στις ιδιομορφές (τις ιδιοσυναρτήσεις) ταλαντώσεως και στην ορθογωνιότητά τους. Εξετάζονται επίσης χωριστά: (α) οι ιδιοταλαντώσεις, δηλαδή οι φυσικοί τρόποι ταλαντώσεως, (β) οι ελεύθερες ταλαντώσεις (με την υπέρθεση ιδιοταλαντώσεων και υπό αρχικές συνθήκες) και (γ) οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την υπέρθεση ιδιομορφών. Σημειώνεται ότι στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που ισχύουν καθίστανται μη ομογενείς. Επομένως η επίλυσή τους (με την υπέρθεση ιδιομορφών) είναι κάτι που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Οι παρούσες εφαρμογές αποτελούν παραδείγματα της χρήσεως της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και της υπερθέσεως των μερικών λύσεων (μεθόδου του Fourier) στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, ομογενείς και μη ομογενείς με οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες και με ποικίλες συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον όμως από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού οι παρούσες εφαρμογές σε ταλαντώσεις γραμμικών φορέων (εδώ απλών ευθύγραμμων συνήθων ράβδων και δοκών) βοηθούν στην εισαγωγή στις σχετικές έννοιες. Τέτοιες είναι οι έννοιες: (α) των αξονικών και των καμπτικών ταλαντώσεων, (β) των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών ταλαντώσεων, (γ) των ιδιοταλαντώσεων, των ελεύθερων και των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, (δ) των κανονικών ή κύριων συντεταγμένων, κλπ. Η εισαγωγή στις έννοιες αυτές ίσως φανεί χρήσιμη στην εκτενή χρήση τους αργότερα στη Δυναμική των Κατασκευών και στη σωστή δυναμική (που περιλαμβάνει και την αντισεισμική) μελέτη σύνθετων κατασκευών, όπως, π.χ., πολυώροφων κτιρίων.

B6.1. ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΟΥ

B6.1.1. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

Θεωρούμε συνήθη ράβδο, δηλαδή ευθύγραμμη ράβδο μήκους L ($0 \leq x \leq L$) από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young) E και με σταθερή διατομή εμβαδού A . Η συνήθης αυτή ράβδος καταπονείται σε αξονικές ταλαντώσεις. (Ισοδύναμος και εξίσου αποδεκτός είναι ο όρος διαμήκεις ταλαντώσεις.) Συμβολίζουμε με $f(x, t)$ την κατανεμημένη αξονική εξωτερική φόρτιση που εφαρμόζεται ανά μονάδα μήκους της ράβδου. Το όλο πρόβλημα διέπεται από την εξής μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.1.1)$$

Την εξίσωση αυτή είχαμε την ευκαιρία να την καταστρώσουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους στην Ενότητα Β3.2 (εξίσωση (3.2.15) της Παραγράφου Β3.2.3). Φυσικά η άγνωστη συνάρτηση είναι η αξονική μετατόπιση $u(x, t)$ των σημείων της ράβδου κατά μήκος της και όχι η εγκάρσια μετατόπιση, όπως είχαμε στο πρόβλημα της χορδής στην εξίσωση (5.2.1). Το γινόμενο EA στην πιο πάνω εξίσωση (6.1.1) το έχουμε αποκαλέσει **δυστένεια**. Ο όρος αυτός είναι ανάλογος των αντίστοιχων όρων **δυσκαμψία** σε κάμψη και **δυστρεψία** σε στρέψη παραμορφώσιμων γραμμικών φορέων, όπως είναι και η παρούσα ράβδος. Σημειώνουμε ότι οι αντίστοιχοι όροι **ατένεια**, **ακαμψία** και **αστρεψία** (με πρόθεμα «α» για άρνηση αντί «δυσ» για δυσκολία) προφανώς αφορούν σε μη παραμορφώσιμους (απόλυτα στερεούς) γραμμικούς φορείς.

Κατανεμημένη αξονική φόρτιση $f(x, t)$ της ράβδου κατά μήκος της παρουσιάζεται μόνο σε ορισμένα προβλήματα ράβδων. Τέτοια είναι π.χ. τα προβλήματα πασσάλων μπηγμένων στο έδαφος για θεμελιώσεις κατασκευών με πασσάλους υπό δυναμική (π.χ. κρουστική ή σεισμική) φόρτιση. Εάν δεν υπάρχει τέτοια φόρτιση, $f(x, t) \equiv 0$, η παραπάνω μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) απλοποιείται στη μορφή (3.2.16), δηλαδή στη μορφή

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad u = u(x, t), \quad (6.1.2)$$

και καθίσταται ομογενής. Με την εισαγωγή μάλιστα και της ταχύτητας των αξονικών ελαστικών κυμάτων (3.2.17), δηλαδή με

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.1.3)$$

προκύπτει άμεσα η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (3.2.18) στην κλασική της μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.1.4)$$

Αυτή ακριβώς είναι η εξίσωση που διέπει και τις εγκάρσιες ταλαντώσεις της χορδής (η εξίσωση της χορδής) και με κάποια μικρή προσέγγιση και του καλωδίου, όπως συμβαίνει στα καλώδια των καλωδιωτών γεφυρών, π.χ. της γέφυρας Ρίου-Αντιρρίου. Την εξίσωση της χορδής είχαμε την ευκαιρία να τη μελετήσουμε πολύ συστηματικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στην Ενότητα Β5.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5.

Στην παρούσα Ενότητα Β6.1 θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, τώρα όμως για τις αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις ράβδου. Επίσης δε θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε συνοριακές συνθήκες μηδενισμού της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, t)$ και στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου, όπως ίσχυε στο πρόβλημα της χορδής στην Ενότητα Β5.2. Προς το σκοπό αυτό θα αλλάξουμε λίγο τη διαδικασία επιλύσεως. Θα αναφερθούμε επίσης και στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) επεκτείνοντας όσα αναφέρθηκαν για μη ομογενείς εξισώσεις στην Ενότητα Β5.6 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5.

Αυτή είναι μια σημαντική και μάλλον ενδιαφέρουσα επέκταση της βασικής μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Συνήθως καλείται μέθοδος υπερθέσεως (ή επαλληλίας) ιδιοσυναρτήσεων, στις παρούσες εφαρμογές υπερθέσεως (ή επαλληλίας) ιδιομορφών. Επίσης η μέθοδος αυτή αποτελεί κατά κάποιον τρόπο γενίκευση και της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων από τις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Σημειώνεται επίσης ότι η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (6.1.4) διαθέτει και κλειστή γενική λύση (χωρίς χρήση σειρών): τη λύση με τη μέθοδο του d'Alembert (4.1.19), την επαναλαμβάνουμε

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \chi(x + ct). \quad (6.1.5)$$

Στη λύση αυτή γίνεται χρήση δύο αυθαίρετων συναρτήσεων φ και χ της μιας μεταβλητής που διαθέτουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους. (Εδώ η σταθερά c δίνεται από τον τύπο (6.1.3).) Όμως η γενική αυτή λύση (που ήδη βρήκαμε και μελετήσαμε στην Παράγραφο Β4.1.3) δεν είναι και η πιο πρόσφορη σε προβλήματα συνοριακών τιμών όπως στην παρούσα πεπερασμένη ράβδο μήκους L ($0 \leq x \leq L$). Σε τέτοια προβλήματα πλεονεκτεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών σε συνδυασμό βέβαια με την υπέρθεση (ή επαλληλία) μερικών λύσεων. Αυτή είναι η μέθοδος του Fourier.

B6.1.2. Χωρισμός των μεταβλητών

Στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) (5.2.1) ή (6.1.4) στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής στην Ενότητα Β5.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5 είχαμε χρησιμοποιήσει το χωρισμό των μεταβλητών x (χωρική μεταβλητή) και t (χρονική μεταβλητή). Ακριβώς το ίδιο θα κάνουμε και εδώ στο πρόβλημα των αξονικών (διαμήκων) ταλαντώσεων ράβδου με το χωρισμό των μεταβλητών (5.2.5), τον ξαναγράφουμε και εδώ

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (6.1.6)$$

Αντικαθιστούμε αυτό το χωρισμό των μεταβλητών στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4). Υποθέτουμε επιπλέον ότι δεν υπάρχει κατανεμημένη εξωτερική αξονική φόρτιση: $f(x, t) = 0$. Έτσι προκύπτει εύκολα (με διαίρεση με $X(x) T(t)$ και πολλαπλασιασμό επί c^2) η σχέση

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2. \quad (6.1.7)$$

Στη σχέση αυτή πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να υποθέσουμε τη σταθερά λ του διαχωρισμού των μεταβλητών αρνητική και ίση με $\lambda = -\omega^2$. Θα παραλείψουμε τη σχετική διερεύνηση της Παραγράφου Β5.2.5 στο πρόβλημα της χορδής. Αρκούμεστε στην παρατήρηση ότι αναμένουμε να έχουμε αξονικές (ή διαμήκειες) ταλαντώσεις της παρούσας ράβδου και τούτο είναι εφικτό με τη σταθερά $-\omega^2$ (δηλαδή με αρνητική σταθερά) στα δύο ίσα κλάσματα (το χωρικό και το χρονικό) της σχέσεως (6.1.7). Πραγματικά από τη δεύτερη ισότητα της ίδιας σχέσεως προκύπτει άμεσα η πολύ γνωστή ομογενής και γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της αρμονικής ταλαντώσεως

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0. \quad (6.1.8)$$

Η εξίσωση αυτή έχει την εξίσου γνωστή γενική λύση

$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t = E \cos(\omega t - \alpha) \quad (6.1.9)$$

(με τα C και D ή E και α σταθερές, α είναι η γωνία φάσεως). Η λύση αυτή δηλώνει αρμονική ταλάντωση με συχνότητα (κυκλική συχνότητα) ω . Συνεπώς υπήρξε λογική η επιλογή του συμβόλου ω στον όρο $-\omega^2$ δεξιά στη σχέση (6.1.7), η οποία προέκυψε από το χωρισμό των μεταβλητών x και t .

Αυτά για τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωσή μας (6.1.8). Θα προχωρήσουμε τώρα και στη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (για τη θέση x κατά μήκος της ράβδου), που προσδιορίζεται και πάλι από τη σχέση (6.1.7) χωρισμού των μεταβλητών. Η εξίσωση αυτή έχει προφανώς τη μορφή

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (6.1.10)$$

και είναι επίσης ομογενής και γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Έτσι ακριβώς ήταν και η αντίστοιχη εξίσωση (5.2.34) στην Παράγραφο Β5.2.5 για τη χορδή (στην τρίτη και επιτυχή δυνατότητα που διερευνήθηκε εκεί). Εδώ όμως έχουμε το σύμβολο ω/c αντί για το p . Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής (6.1.10) είναι προφανώς η εξής:

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.11)$$

Β6.1.3. Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου

Στη σχέση (6.1.7) παρατηρούμε την κατευθείαν χρήση του συμβόλου ω στο χωρισμό των μεταβλητών x και t . Παρατηρούμε όμως τώρα και μια χρονοτριβή, ένα μικρό δισταγμό ως προς τη χωρική λύση (6.1.11) έχοντας βρει τη χρονική λύση (6.1.9) πριν από τη χωρική (6.1.11). Αυτό είναι αντίθετο από ό,τι συνέβη στην Ενότητα Β5.2. Δε συμβιβάζεται επίσης με την ήδη διαθέσιμη σχετική εμπειρία στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (6.1.4). Η εξίσωση αυτή ισχύει τόσο στην Ενότητα Β5.2 στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής (ή του καλωδίου) όσο και στην παρούσα Ενότητα Β6.1, εδώ στο πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων της ράβδου. Γιατί άραγε αυτή η απόκλιση στον τρόπο εργασίας;

Η απάντηση, χωρίς καθυστέρηση, είναι πολύ απλή. Στην Ενότητα Β5.2 στο πρόβλημα της χορδής (ή του καλωδίου) η χορδή θεωρήθηκε στερεωμένη και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Αυτό ήταν κάτι το εύλογο για έναν απόλυτα εύκαμπτο γραμμικό φορέα (ουσιαστικά με μηδενικό εμβαδόν διατομής A). Δεν ισχύει όμως το ίδιο και στη ράβδο που εξετάζεται εδώ (σε αξονικές ταλαντώσεις). Η ράβδος αυτή έχει πεπερασμένο εμβαδόν διατομής A . Το εμβαδόν αυτό A υπεισέρχεται βέβαια στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (6.1.1): τη μη ομογενή, και (6.1.2): την αντίστοιχη ομογενή. Με άλλα λόγια εδώ στη ράβδο και σε αξονικές ταλαντώσεις έχουμε τις εξής δύο κύριες συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου: είτε (α) στήριξη (ή πάκτωση) σε ένα άκρο $x = a$, οπότε προφανώς

$$u(a, t) = 0 \implies X(a) = 0 \quad (6.1.12)$$

από το χωρισμό των μεταβλητών (6.1.6), είτε (β) ελεύθερο άκρο $x = a$, οπότε

$$N(a, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \implies X'(a) = 0. \quad (6.1.13)$$

Για το τελευταίο αποτέλεσμα: $X'(a) = 0$ πρέπει να θυμηθούμε: (α) ξανά το χωρισμό των μεταβλητών (6.1.6), (β) τον τύπο (3.2.4) της Ενότητας Β3.2 (που προέκυψε από τη Μηχανική των Υλικών, συγκεκριμένα από το νόμο του Hooke στη μια διάσταση x) και (γ) το προφανές γεγονός ότι σε ελεύθερο άκρο ράβδου η αξονική δύναμη N είναι μηδέν.

Συνδυάζουμε τώρα τις δύο αυτές κύριες συνοριακές συνθήκες (6.1.12) και (6.1.13). (Υπάρχουν βέβαια και άλλες, όπως είναι η στήριξη ενός άκρου ράβδου μέσω ελατηρίου σταθεράς k κατά τον άξονα της ράβδου.) Με το συνδυασμό αυτό παίρνουμε τελικά τις ακόλουθες τέσσερις δυνατές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο:

(α) Στερεωμένα και τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου (αμφίπακτη ράβδος), οπότε

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \implies X(0) = X(L) = 0. \quad (6.1.14)$$

(β) **Στερεωμένο το αριστερό άκρο** $x = 0$ και **ελεύθερο το δεξιό** $x = L$ της ράβδου (πρόβολος), οπότε

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.15)$$

(γ) **Ελεύθερο το αριστερό άκρο** $x = 0$ και **στερεωμένο το δεξιό** $x = L$ της ράβδου (επίσης πρόβολος), οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(L, t) = 0 \implies X'(0) = X(L) = 0. \quad (6.1.16)$$

Φυσικά η περίπτωση αυτή (γ) είναι απόλυτα ανάλογη της περιπτώσεως (β) ευθύς πιο πάνω και επομένως δε χρειάζεται ειδική μελέτη.

(δ) **Ελεύθερα και τα δύο άκρα** $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου (ελεύθερη ράβδος, που υπόκειται προφανώς και σε κίνηση στερεού σώματος πέρα από τις αξονικές ταλαντώσεις, γιατί δεν υπάρχει στήριξή της), οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X'(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.17)$$

Στη χορδή (ή, προσεγγιστικά, και στο καλώδιο, στο οποίο συνήθως αγνοούμε την πάρα πολύ μικρή δυσκαμψία του) που μελετήθηκε στην Ενότητα Β5.2 είχαμε μόνο την περίπτωση στηρίξεως στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$. Αντίθετα εδώ στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο παρατηρούμε ότι έχουμε τέσσερις περιπτώσεις στηρίξεως (βέβαια με την πρώτη απόλυτα ανάλογη εκείνης στο πρόβλημα της χορδής και με τη δεύτερη και την τρίτη παρόμοιες μεταξύ τους). Το γεγονός αυτό μας επιβάλλει να προσφύγουμε σε δυο-τρεις κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς που θα τους δούμε στη συνέχεια και που δεν υπήρξαν αναγκαίοι στο πρόβλημα της χορδής στην Ενότητα Β5.2. Οι ίδιοι ουσιαστικά μαθηματικοί χειρισμοί θα είναι εξίσου αναγκαίοι και στο αρκετά δυσκολότερο (και φυσικά πολύ πιο χρήσιμο για τον Πολιτικό Μηχανικό) πρόβλημα της καμπτικά ταλαντούμενης δοκού. Το ενδιαφέρον αυτό πρόβλημα θα το εξετάσουμε στην αμέσως επόμενη Ενότητα Β6.2.

Β6.1.4. Στερεωμένη και στα δύο άκρα (αμφίπακτη) ράβδος

Πρόκειται για την ευκολότερη περίπτωση με συνοριακές συνθήκες τις (6.1.14). Η περίπτωση αυτή είναι απόλυτα ανάλογη με εκείνη της χορδής στην Ενότητα Β5.2. (Εκεί όμως αναφερόμασταν σε εγκάρσιες ταλαντώσεις, όχι σε αξονικές ταλαντώσεις!) Από τη χωρική λύση (6.1.11) και τις συνοριακές συνθήκες (6.1.14) προκύπτει αμέσως ότι $A = 0$ (λόγω της πρώτης συνθήκης (6.1.14)). Προκύπτει επίσης και η στοιχειώδης εξίσωση (λόγω της δεύτερης συνθήκης (6.1.14))

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (6.1.18)$$

για μη τετριμμένες λύσεις $X(x) \neq 0$ (με $B \neq 0$). Άρα οι ιδιοσυχνότητες (κυκλικές ιδιοσυχνότητες εννοείται) ω_n στο παρόν πρόβλημα ταλαντώσεων θα είναι άπειρες, διακεκριμένες και οι εξής:

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \implies \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.19)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ προκύπτουν αμέσως από τη λύση (6.1.11) (με $A = 0$, όπως ήδη σημειώθηκε) στη μορφή

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.1.20)$$

Φυσικά η τιμή $n = 0$ οδηγεί στην τετριμμένη λύση $X_0(x) \equiv 0$, η οποία απορρίπτεται. (Έτσι κι αλλιώς η τιμή $n = 0$ δεν αφορά σε ταλαντώσεις!)

Αφετέρου για τη χρονική συνάρτηση $T(t)$ η σχετική λύση (6.1.9) παίρνει τώρα τη μορφή

$$T_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t = C_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi c t}{L} \quad (6.1.21)$$

με τις ιδιοσυχνότητες ω_n ήδη καθορισμένες από τις σχέσεις (6.1.19).

Επομένως η λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος (6.1.4) στο παρόν πρόβλημα των αξονικών ταλαντώσεων στερεωμένης και στα δύο άκρα (αμφίπακτης) ράβδου με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (6.1.6) έχει τελικά τη μορφή

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{\omega_n x}{c} (C_n^* \cos \omega_n t + D_n^* \sin \omega_n t) \quad (6.1.22)$$

για την ιδιοσυχνότητα ω_n . Σημειώνεται ότι η σταθερά B_n στην ιδιοσυνάρτηση $X_n(x)$ έχει ενσωματωθεί στις σταθερές C_n και D_n (με $C_n^* = B_n C_n$ και $D_n^* = B_n D_n$). Ισοδύναμη μορφή της παραπάνω λύσεως (6.1.22) (με τη χρήση γωνίας φάσεως α_n και νέας σταθεράς E_n^*) είναι και η εξής:

$$u_n(x, t) = E_n^* \sin \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t - \alpha_n). \quad (6.1.23)$$

Μερικές φορές μάλιστα η μορφή αυτή προτιμάται από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Επίσης ευκολότατα διαπιστώνεται από τη σχέση (6.1.20) ότι

$$X_n(0) = X_n(L) = 0 \implies u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (6.1.24)$$

Άρα επαληθεύεται ότι πρόκειται για ράβδο στερεωμένη και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Στα άκρα αυτά η συνάρτηση $X_n(x)$, η οποία παριστάνει το «σχήμα» της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου χωρίς όμως τη χρονική εξάρτησή του $T_n(t)$, προφανώς μηδενίζεται. Επιπλέον όμως η ίδια συνάρτηση $X_n(x)$ μηδενίζεται (για $n > 1$) και στα σημεία

$$x_k = \frac{kL}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.1.25)$$

της ράβδου. Ακριβώς όπως και τα άκρα $x = x_0 = 0$ και $x = x_n = L$ της ράβδου, έτσι και τα σημεία x_k αποτελούν κόμβους των αξονικών αυτών ταλαντώσεων, δηλαδή σημεία της ράβδου που μένουν συνεχώς εντελώς ακίνητα. (Βέβαια δεν πρέπει να συγχέονται οι κόμβοι στις ταλαντώσεις χορδών, ράβδων και δοκών με τους κόμβους στην ανάλυση των κατασκευών ή με τους κόμβους στην αριθμητική ολοκλήρωση, στα πεπερασμένα και τα συνορικά στοιχεία, κλπ. Η λέξη **κόμβος** χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις από τον Πολιτικό Μηχανικό με διαφορετικές σημασίες!)

B6.1.5. Ιδιομορφές ταλαντώσεως και ιδιοταλαντώσεις

Αναφερθήκαμε ήδη στις ιδιοσυχνότητες ω_n της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος, οι ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ στις σχέσεις (6.1.20), πολύ συχνά καλούνται **ιδιομορφές των αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου** και απλούστερα **ιδιομορφές ταλαντώσεως** ή, ακόμη πιο απλά, **ιδιομορφές**. Τους όρους αυτούς (ιδιομορφές ταλαντώσεως ή ιδιομορφές) τους προκρίνουμε, τους προτιμάμε και θα τους χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στο κεφάλαιο αυτό. Συγκεκριμένα θα κάνουμε χρήση των όρων αυτών τόσο για τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (στην παρούσα ενότητα) όσο και για τις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού (στην επόμενη ενότητα και αρκετά πιο ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό).

Σημειώνουμε επίσης ότι η καθεμία μερική λύση $u_n(x, t)$ που δίνεται από τη σχέση (6.1.22) εκφράζει έναν τρόπο, ένα φυσικό τρόπο αξονικής (ή διαμήκου) ταλαντώσεως της ράβδου. Κάθε τέτοια λύση (ή φυσικός τρόπος ταλαντώσεως) πληροί τόσο τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) όσο και τις συνοριακές συνθήκες, στην περίπτωση μας τις (6.1.14). Όταν αλλάζει το n , δηλαδή αλλάζει η ιδιοσυχνότητα ταλαντώσεως ω_n , τότε παίρνουμε έναν άλλο φυσικό τρόπο αξονικής ταλαντώσεως της ράβδου. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές $u_n(x, t)$ εκφράζουν τους φυσικούς τρόπους ταλαντώσεως της ράβδου (χωρίς αρχικές συνθήκες ούτε και κατανομημένη αξονική φόρτιση $f(x, t)$ της ράβδου), δηλαδή τις ιδιοταλαντώσεις της ράβδου. Αυτές είναι άπειρες στον αριθμό ακριβώς μία για κάθε τιμή του n .

Υπέρθεση (ή επαλληλία) των ιδιοταλαντώσεων αυτών θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε σε επόμενη παράγραφο της ενότητας αυτής το γενικό πρόβλημα των ελεύθερων αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου υπό αρχικές συνθήκες. Αυτό ήδη το κάναμε και στο πρόβλημα της χορδής στην Παράγραφο Β5.2.10. Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων ράβδου είναι ακόμη πιο δύσκολο. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) που το διέπει είναι μη ομογενής. Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων θα αντιμετωπισθεί και αυτό σε επόμενη παράγραφο της παρούσας ενότητας με βάση τις ίδιες ακριβώς ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. Τούτο αποτελεί επέκταση της μεθοδολογίας που αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και με σταθερούς συντελεστές βέβαια.

Β6.1.6. Στερεωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο (πρόβολος) ράβδος

Θεωρούμε πρώτα στερεωμένο (πακτωμένο) το αριστερό άκρο της ράβδου $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό $x = L$. Τότε ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (6.1.15), συγκεκριμένα

$$X(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.26)$$

Τώρα από τη γενική λύση (6.1.11) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.1.10), επαλαμβάνουμε τη γενική αυτή λύση

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}, \quad (6.1.27)$$

προκύπτει ευθύς (λόγω της πρώτης συνοριακής συνθήκης (6.1.26)) ότι

$$A = 0 \implies X(x) = B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.28)$$

Στη συνέχεια από την πρώτη παράγωγο της ίδιας λύσεως (6.1.11) (ή (6.1.27))

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \quad (6.1.29)$$

με $A = 0$ (πρώτη σχέση (6.1.28)) προκύπτει αμέσως ότι

$$X'(x) = \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.30)$$

Τώρα η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (6.1.26) (για ένα ελεύθερο άκρο $x = L$) απαιτεί να ισχύει

$$X'(L) = 0 \implies \cos \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (6.1.31)$$

για μη τετριμμένη λύση: $X(x) \neq 0$ (δηλαδή με $B \neq 0$). Τότε οι ιδιοσυχνότητες ω_n δίνονται προφανώς από τους τύπους

$$\frac{\omega_n L}{c} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L} = \frac{[n - (1/2)]\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.32)$$

Επίσης λόγω της δεύτερης σχέσεως (6.1.28) οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} = B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.33)$$

Συγκρίνουμε τώρα τις σχέσεις (6.1.19) για τις ιδιοσυχνότητες ω_n στην αμφίπακτη ράβδο και (6.1.32) για τις ιδιοσυχνότητες ω_n στην παρούσα περίπτωση ράβδου με το αριστερό άκρο της στερεωμένο (πακτωμένο) και το δεξιό ελεύθερο (πρόβολος). Παρατηρούμε ότι οι ιδιοσυχνότητες (6.1.32) κείνται ακριβώς στα μέσα των διαστημάτων που ορίζουν η τετριμμένη (και μη ισχύουσα) ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 0$ και οι αληθινές ιδιοσυχνότητες (6.1.19) για τη ράβδο και με τα δύο άκρα της στερεωμένα (την αμφίπακτη ράβδο).

Απολύτως ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση όπου το αριστερό άκρο της ράβδου $x = 0$ είναι ελεύθερο, ενώ το δεξιό $x = L$ είναι στερεωμένο (πακτωμένο). Τώρα βέβαια θα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (6.1.16) αντί για τις (6.1.15). Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι $B = 0$. Επίσης εύκολα προκύπτει ότι οι ιδιοσυχνότητες ω_n δίδονται και πάλι από τους τύπους (6.1.32), ακριβώς τους ίδιους τύπους! Αντίθετα οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ είναι τώρα συνημιτονικές και έχουν τη μορφή

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{\omega_n x}{c} = A_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1.34)$$

ενώ οι προηγούμενες ιδιομορφές (6.1.33) ήσαν ημιτονικές. Φυσικά δεν υπάρχει καμία ουσιαστική διαφορά μεταξύ των εκφράσεων (6.1.33) και (6.1.34) για τις ιδιομορφές $X_n(x)$.

Β6.1.7. Ελεύθερη και στα δύο άκρα ράβδος

Η τελευταία βασική περίπτωση ράβδου, αυτή χωρίς καθόλου στηρίξεις, ίσως να ξενίζει λίγο εκ πρώτης όψεως και πραγματικά περιλαμβάνει και κίνηση στερεού σώματος, όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω. Οι σχετικές συνοριακές συνθήκες είναι τώρα οι (6.1.17), δηλαδή

$$X'(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.35)$$

Η γενική λύση της χωρικής συνθήκης διαφορικής εξίσωσης (6.1.10) είναι πάλι η (6.1.11), ισοδύναμα (6.1.27), δηλαδή

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.36)$$

Η παράγωγος της λύσεως αυτής $X(x)$ είναι η (6.1.29), την ξαναγράφουμε και αυτή

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.37)$$

Ασφαλώς όμως τώρα $B = 0$ λόγω της πρώτης από τις συνοριακές συνθήκες (6.1.35): της συνθήκης $X'(0) = 0$. Επομένως η πιο πάνω σχέση (6.1.37) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.38)$$

Στη συνέχεια η δεύτερη από τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (6.1.35): η συνθήκη $X'(L) = 0$ μας δίνει την εξίσωση για τις ιδιοσυχνότητες

$$X'(L) = 0 \implies \omega \sin \frac{\omega L}{c} = 0. \quad (6.1.39)$$

Επομένως οι ιδιοσυχνότητες ω_n δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \implies \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.40)$$

Στις σχέσεις αυτές δε λησμονήσαμε και τη μηδενική ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 0$. Εντούτοις ουσιαστικά αυτή δεν είναι ιδιοσυχνότητα αξονικής ταλαντώσεως της ράβδου, αλλά δηλώνει απλά την κίνηση της ράβδου σαν στερεού σώματος. Η κίνηση αυτή είναι προφανής, όπως ήδη αναφέρθηκε, εξαιτίας την πλήρους ελλείψεως στηρίξεων στη ράβδο. Δηλαδή η ράβδος μπορεί να κινείται και σαν στερεό σώμα και να ταλαντώνεται αξονικά ταυτόχρονα. Σημειώνεται επίσης ότι οι πιο πάνω ιδιοσυχνότητες (6.1.40) για την ελεύθερη ράβδο (εκτός από τη μηδενική $\omega_0 = 0$) συμπίπτουν με τις ιδιοσυχνότητες (6.1.19) για την αμφίπακτη ράβδο. Βέβαια, όπως θα φανεί και αμέσως πιο κάτω, δεν ισχύει το ίδιο και για τις αντίστοιχες ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$, που διαφέρουν.

Από τις ιδιοσυχνότητες (6.1.40) προκύπτουν και οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ λόγω της σχέσεως (6.1.36) με $B = 0$, όπως ήδη διαπιστώθηκε. Συγκεκριμένα οι ιδιομορφές αυτές $X_n(x)$ δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{\omega_n x}{c} = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.41)$$

Η κίνηση της ράβδου σαν στερεό σώμα (σε αντίθεση με τις ελαστικές ιδιοταλαντώσεις της) προκύπτει φυσικά για $n = 0$, οπότε $\omega_n = \omega_0 = 0$. Έχει επομένως τη μορφή

$$X_0(x) = A_0 \quad (6.1.42)$$

με το A_0 σταθερά. (Η ειδική ιδιομορφή $X_0(x)$ καλείται και **στερεά ιδιομορφή**.) Ασφαλώς, επαναλαμβάνεται, η κίνηση της ράβδου σαν στερεό σώμα δεν αποτελεί ταλάντωση, συγκεκριμένα $\omega_0 = 0$. Άρα, αν θέλει, ο Πολιτικός Μηχανικός την αγνοεί στις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις. Από φυσικής όμως απόψεως η κίνηση στερεού σώματος είναι απόλυτα δυνατή στην παρούσα περίπτωση πλήρους ανυπαρξίας στηρίξεων της ράβδου.

Με την περίπτωση της ελεύθερης ράβδου συμπληρώσαμε τη μελέτη των αξονικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους ράβδου έχοντας εξετάσει και τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις στηρίξεως (α) έως και (δ) της Παραγράφου Β6.1.3 με συνοριακές συνθήκες τις (6.1.14) έως και (6.1.17) αντίστοιχα. Πέρα από τις ιδιοσυχνότητες ω_n σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές προσδιορίσαμε και τις αντίστοιχες ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. Αυτές σε όλες τις περιπτώσεις προέκυψαν με πολύ απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις. Τελικά οι ιδιοταλαντώσεις προσδιορίζονται βάσει των γενικότερων τύπων

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.43)$$

Στους τύπους αυτούς οι χρονικές ιδιοσυναρτήσεις $T_n(t)$ δίνονται από τους τύπους (6.1.21), συγκεκριμένα

$$T_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t = E_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.44)$$

(Φυσικά οι σταθερές α_n παριστάνουν γωνίες φάσεως.) Η μοναδική σταθερά A_n ή B_n των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί στις σταθερές C_n και D_n ή στη σταθερά E_n . Άρα οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ συνήθως γράφονται χωρίς τη σταθερά αυτή, δηλαδή με $A_n = 1$ ή $B_n = 1$ ή με κάποια άλλη κατάλληλη τιμή της σταθεράς αυτής. Στο σημείο αυτό θα επανέλθουμε στη μεθεπόμενη Παράγραφο Β6.1.9, η οποία αφορά στην ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα) των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$.

Β6.1.8. Μια απλούστερη ειδική δυνατότητα στο χωρισμό των μεταβλητών

Έχοντας λύσει τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.8) που προέκυψε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, διαπιστώσαμε ότι η χρονική εξάρτηση $T(t)$ των αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε είναι τριγωνομετρικής μορφής (σχέση (6.1.9)). Τούτο δεν μας εκπλήσσει, θα λέγαμε μάλλον εμείς το επιδιώξαμε μετά και από τη λεπτομερή ανάλυση της Παραγράφου Β5.2.5 στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής. Στο πρόβλημα εκείνο είχε γίνει διάκριση των τριών δυνατοτήτων: (α) μηδενικής, (β) θετικής και (γ) αρνητικής σταθεράς διαχωρισμού λ στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών x και t . Έγινε επιλογή της τρίτης δυνατότητας (αρνητική σταθερά λ , $\lambda < 0$) και στην Ενότητα Β5.2 και στην παρούσα Ενότητα Β6.1, όπου ήδη επιλέξαμε αρνητική σταθερά διαχωρισμού λ , συγκεκριμένα τη σταθερά $\lambda = -\omega^2$ στη σχέση (6.1.7).

Ασφαλώς πολύ σωστά ενεργήσαμε και στην Ενότητα Β5.2 και στην παρούσα Ενότητα Β6.1. Με τον τρόπο αυτό οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου μπορούν να πληρωθούν με τις τριγωνομετρικές ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. Κάτι τέτοιο θα ήταν ανέφικτο με υπερβολικές συναρτήσεις, \cosh ή/και \sinh , στις ιδιομορφές αυτές $X_n(x)$. Το κυριότερο όμως είναι ότι με την επιλογή αρνητικής σταθεράς διαχωρισμού, συγκεκριμένα με $\lambda = -\omega^2$, παίρνουμε πραγματικά ταλαντώσεις. Δηλαδή παίρνουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις (\cos και \sin) στις χρονικές συναρτήσεις $T_n(t)$ στους τύπους (6.1.44) και όχι υπερβολικές συναρτήσεις (\cosh και \sinh). Οι τελευταίες θα οδηγούσαν όχι μόνο σε πλήρη έλλειψη των αναμενόμενων ταλαντώσεων, αλλά επίσης και σε απειρισμό των αντίστοιχων αξονικών μετατοπίσεων $u_n(x, t)$ για $t \rightarrow \infty$ λόγω των

σχέσεων (6.1.43). Σαφέστερα οι συνοριακές συνθήκες και στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου δε θα μπορούσαν να πληρωθούν ταυτόχρονα. Επιπλέον η αρχή διατηρήσεως της ενέργειας θα παραβιαζόταν και αυτή λόγω του απειρισμού των συναρτήσεων $u_n(x, t)$ για $t \rightarrow \infty$ σε κάθε σημείο $0 < x < L$ της ράβδου. Αυτό μάλιστα θα συνέβαινε υπό συνθήκες ανυπαρξίας κάθε μορφής κατανεμημένης εξωτερικής αξονικής φορτίσεως $f(x, t)$.

Με την εισαγωγή αυτή γίνεται κατανοητό ότι αρχικά μεν ο Πολιτικός Μηχανικός είναι πολύ καλό να κάνει την πλήρη διερεύνηση της Παραγράφου Β5.2.5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Στη συνέχεια όμως μπορεί να επιλέγει κατευθείαν αρνητική σταθερά διαχωρισμού των μεταβλητών $\lambda = -\omega^2$ σε προβλήματα ταλαντώσεων, όπως ήδη έγινε στη σχέση (6.1.7). Με επαρκή πλέον εμπειρία στο θέμα αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί παραπέρα να υποθέτει μόνος του (εξαρχής και χωρίς διερεύνηση) τριγωνομετρική μορφή της χρονικής συναρτήσεως $T(t)$ σε προβλήματα ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, π.χ. τη μορφή

$$T(t) = \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.45)$$

(Τέτοιας μορφής είναι και οι παρούσες αξονικές ταλαντώσεις.) Τότε στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η σχέση (6.1.6) απλοποιείται στη μορφή

$$u(x, t) = X(x) \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.46)$$

Η απλοποίηση αυτή συνίσταται στο ότι τώρα μια μόνο συνάρτηση είναι άγνωστη, η χωρική συνάρτηση $X(x)$ των ιδιομορφών ταλαντώσεως. Η χρονική συνάρτηση $T(t)$ έχει ορθά υποτεθεί εξαρχής στη μορφή (6.1.45) ή σε κάποια ανάλογη τριγωνομετρική μορφή, όπως με ημίτονο αντί με συνημίτονο, ή στην αναλυτικότερη μορφή $C \cos \omega t + D \sin \omega t$.

Παραγωγίζοντας τώρα δύο φορές και ως προς τη θέση x και ως προς το χρόνο t τη σχέση (6.1.46), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cos(\omega t - \alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 X(x) \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.47)$$

Τώρα με τη χρήση των δευτέρων αυτών μερικών παραγώγων η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) (η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος) για τις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις μας οδηγεί σε μια μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση, την εξίσωση (6.1.10), που έχει τη μορφή

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0. \quad (6.1.48)$$

Ακριβώς το ίδιο συνέβαινε και προηγουμένως. Πετύχαμε έτσι την απλούστευση του προβλήματός μας έχοντας απαλλαγεί από τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.8). Βέβαια οι συνοριακές συνθήκες (6.1.14) ή (6.1.15) ή (6.1.16) ή (6.1.17) στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου πρέπει να ληφθούν και τώρα υπόψη, ακριβώς όπως έγινε και προηγουμένως.

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τις ιδιοσυχνότητες ω_n και τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ σε ιδιοταλαντώσεις. Οι ιδιοταλαντώσεις δηλώνουν ότι δεν υπάρχει εξωτερική αξονική φόρτιση $f(x, t)$ και ότι επίσης δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες στη ράβδο. (Δεν αγνοούνται όμως στις ιδιοταλαντώσεις οι συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα της ράβδου!) Με την υπόθεση αυτή θα μπορούσαμε να πάρουμε μια οποιαδήποτε τριγωνομετρική συνάρτηση $T(t)$ στο χωρισμό των μεταβλητών (6.1.46), π.χ. τη συνάρτηση

$$T(t) = \cos \omega t \quad \text{ή/και} \quad T(t) = \sin \omega t. \quad (6.1.49)$$

Αν μάλιστα καταλαβαίνουμε τί κάνουμε, θα μπορούσαμε να πάρουμε ακόμη και μιγαδική συνάρτηση της μορφής

$$T(t) = e^{i\omega t}. \quad (6.1.50)$$

Αναγνωρίζουμε βέβαια ότι από φυσικής απόψεως μια τέτοια έκφραση (δηλαδή μια μιγαδική έκφραση) είναι απαράδεκτη. Η έννοια της μιγαδικής αυτής συναρτήσεως $T(t)$ είναι ότι η αληθινή χρονική εξάρτηση των αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε είναι είτε (α) το πραγματικό μέρος $\cos \omega t$ είτε (β) το φανταστικό μέρος $\sin \omega t$ της πιο πάνω μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως $e^{i\omega t}$. Αυτό είναι δυνατόν, επειδή σύμφωνα με τον τύπο του Euler

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \text{οπότε} \quad \cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t} \quad \text{και} \quad \sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}. \quad (6.1.51)$$

Σημειώνεται επίσης ότι τα σύμβολα Re (επισημότερα από απόψεως κλασικής στοιχειοθεσίας \Re) και Im (επισημότερα \Im) δηλώνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα μιας μιγαδικής συναρτήσεως. Ειδικά εδώ πρόκειται για την εκθετική μιγαδική συνάρτηση $e^{i\omega t}$ εννοείται πάντοτε για την κυκλική συχνότητα ω .

Παρατηρείται επίσης και με έμφαση μάλιστα ότι η απλοποιημένη διαδικασία της παρούσας παραγράφου υπήρξε δυνατή εξαιτίας της μη υπάρξεως αποσβέσεως των ταλαντώσεων. Με πιο μαθηματικούς όρους αυτό επιτεύχθηκε, επειδή η χρονική παράγωγος στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) (στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος) ήταν δευτέρας τάξεως με την πρώτη χρονική μερική παράγωγο (όπως και κάθε χρονική παράγωγο περιττής τάξεως) απύσα. Τούτο είναι εύλογο (υπό την ανυπαρξία αποσβέσεων) για τις αδρανειακές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι αδρανειακές δυνάμεις είναι ανάλογες της επιταχύνσεως $a(x, t)$, στην περίπτωση μας της δεύτερης χρονικής μερικής παραγώγου $\partial^2 u / \partial t^2$ της μετατοπίσεως $u(x, t)$. Πιο συγκεκριμένα η παράγωγος αυτή $\partial^2 u / \partial t^2$ εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.1.1) υπό μια κατανεμημένη αξονική φόρτιση, $f(x, t) \neq 0$, ή (6.1.2) χωρίς αξονική φόρτιση, $f(x, t) = 0$, σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις.

B6.1.9. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών: η κλασική μέθοδος της Τριγωνομετρίας

Εξετάσαμε προηγουμένως τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ μιας αξονικά ταλαντούμενης συνήθους ράβδου (χωρίς κατανεμημένη εξωτερική αξονική φόρτιση $f(x, t)$). Οι σχετικές ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ ήδη προσδιορίστηκαν στις Παραγράφους B6.1.4, B6.1.6 και B6.1.7. Μπορεί να αποδειχθεί μάλιστα ότι οι ιδιομορφές αυτές αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων κατά μήκος της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα $[0, L]$. Δεν υπάρχει μάλιστα συνάρτηση βάρους $w(x)$, δηλαδή $w(x) = 1$. Για μια συγκεκριμένη περίπτωση συνήθους ράβδου ισχύουν επομένως οι σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.52)$$

Με συντομότερο (και λίγο μαθηματικότερο) συμβολισμό για το παραπάνω ολοκλήρωμα οι ίδιες σχέσεις ορθογωνιότητας μπορούν να γραφούν και στη μορφή

$$\langle X_m, X_n \rangle = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.53)$$

Οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα απλές για τις τόσο στοιχειώδεις τριγωνομετρικές ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$, τις οποίες προσδιορίσαμε, με τη χρήση των πολύ γνωστών τριγωνομετρικών τύπων

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (6.1.54)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (6.1.55)$$

Παραδείγματος χάρι, για τη στερεωμένη και στα δύο άκρα (αμφίπακτη) ράβδο της Παραγράφου B6.1.4 οι ιδιομορφές ταλαντώσεως έχουν τη μορφή (6.1.20), δηλαδή (με τη σταθερά $B_n = 1$)

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.1.56)$$

Επομένως η προς απόδειξη ιδιότητα ορθογωνιότητας (από το επίθετο ορθογώνιος ή ορθογωνικό-τητας από το επίθετο ορθογωνικός, που είναι ισοδύναμος όρος) (6.1.52) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.57)$$

Τώρα με τη χρήση του κλασικού τριγωνομετρικού τύπου (6.1.55) μετατρέπουμε το γινόμενο των ημιτονικών συναρτήσεων σε διαφορά συνημιτονικών συναρτήσεων και στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα το σχετικό ολοκλήρωμα. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{L}{2(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{L}{2(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{L} \Big|_0^L \\ &= 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.1.58)$$

Αυτή η σχέση ορθογωνιότητας ισχύει, επειδή $\sin k\pi = 0$ για ακέραιες τιμές του k , όπως πράγματι είναι οι τιμές $k = 0$, $k = m - n$ και $k = m + n$ (με $m \neq n$) στην πιο πάνω σχέση (6.1.58).

Άρα αποδείχθηκε η ιδιότητα ορθογωνιότητας των ιδιομορφών αξονικών ταλαντώσεων $X_n(x)$ για την αμφίπακτη ράβδο. Τίποτε το παράδοξο! Ήταν αναμενόμενη η ιδιότητα αυτή, ήταν λίγο-πολύ γνωστή από τις σειρές Fourier για τις ημιτονικές συναρτήσεις, που έχουν εξετασθεί στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II: Μέρος Α αυτών των διδακτικών βιβλίων, Κεφάλαιο Α16. Εντελώς ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση της ελεύθερης ράβδου με τις αντίστοιχες συνημιτονικές ιδιομορφές ταλαντώσεως (6.1.41). Η απόδειξη είναι απολύτως παρόμοια και εξίσου απλή, τώρα όμως με τη χρήση του τριγωνομετρικού τύπου (6.1.54) αντί του (6.1.55).

Φυσικά η ιδιότητα της ορθογωνιότητας (6.1.52) (ή (6.1.53) με συντομότερο συμβολισμό) έχει νόημα μόνο για διαφορετικές ιδιομορφές ($m \neq n$), όπως ήδη έχουμε τονίσει. Δηλαδή για $m = n$ το σχετικό ολοκλήρωμα δεν είναι μηδέν και υπολογίζεται (και πάλι με τη χρήση του τριγωνομετρικού τύπου (6.1.55), τώρα όμως με $\alpha = \beta$) για αμφίπακτη ράβδο ως εξής:

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.59)$$

(Το ίδιο αποτέλεσμα, $L/2$, ισχύει και για την περίπτωση της ελεύθερης ράβδου.) Επομένως με συνδυασμό των σχέσεων (6.1.52) (ή (6.1.57)) και (6.1.59) η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ παίρνει τη γενική της μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \frac{L}{2} \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.60)$$

Στη σχέση αυτή το σύμβολο δ_{mn} δηλώνει το γνωστό δέλτα του Kronecker, που ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } m \neq n, \\ 1, & \text{εάν } m = n. \end{cases} \quad (6.1.61)$$

Σημειώνεται ότι το δέλτα του Kronecker δ_{mn} δεν έχει καμία σχέση με την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac, που την έχουμε συχνά χρησιμοποιήσει στο μετασχηματισμό Laplace.

Η γενικευμένη ιδιότητα ορθογωνιότητας (6.1.60) για τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ ισχύει με τις σχετικές σταθερές (τις B_n στην αμφίπακτη ράβδο, τις A_n στην ελεύθερη ράβδο) να έχουν παραλειφθεί στις ιδιομορφές $X_n(x)$, δηλαδή να έχουν θεωρηθεί ίσες με τη μονάδα. Αυτό δεν είναι βέβαια υποχρεωτικό: η σημαντική αυτή ιδιότητα (με μηδέν δεξιά, όταν $m \neq n$) ισχύει φυσικά και με πολλαπλασιαστικές σταθερές στις ιδιομορφές $X_n(x)$: απλά, όταν $m = n$, αλλάζει το δεξιό μέλος.

Συνήθως στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τη σχέση ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ στη μορφή της (6.1.60), αλλά με το κλάσμα του δεξιού μέλους $L/2$ γραμμένο σαν

$$\frac{L}{2} = \frac{\rho AL}{2\rho A} = \frac{\rho AL/2}{\rho A} = \frac{M_n}{\rho A} \quad \text{με} \quad M_n := \frac{\rho AL}{2} \quad \text{και} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.62)$$

φυσικά με ρA τη γραμμική πυκνότητα (πυκνότητα ανά μονάδα μήκους) της ράβδου. Έτσι εισάγονται οι καλούμενες **γενικευμένες μάζες** M_n για τις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα σχέση για τον Πολιτικό Μηχανικό, που είναι φυσικά πλήρως εξοικειωμένος με φυσικές έννοιες όπως τη γραμμική πυκνότητα ρA και τη μάζα M .

Από την άλλη πλευρά για το Μαθηματικό είναι ίσως πολύ καλύτερα η σταθερά A_n ή B_n στις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ να επιλεγεί ίση με $\sqrt{2/L}$. Τότε εύλογα οι σχέσεις ορθογωνιότητας (6.1.60) θα πάρουν μια παρόμοια, αλλά μαθηματικά πιο κανονική μορφή με το δεξιό μέλος $1 \cdot \delta_{mn}$. Έχουμε τότε τις κανονικοποιημένες ιδιομορφές $\hat{X}_n(x)$, που δεν είναι όμως ιδιαίτερα σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό, δηλαδή δεν προκαλούν σημαντική απλοποίηση στους υπολογισμούς του.

Στο σημείο αυτό ας υπενθυμίσουμε τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ και για τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στη συνήθη ράβδο μας σε αξονικές ταλαντώσεις:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.20) για αμφίπακτη ράβδο,} \quad (6.1.63)$$

$$X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.33) για ράβδο με στήριξη αριστερά,} \quad (6.1.64)$$

$$X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.34) για ράβδο με στήριξη δεξιά,} \quad (6.1.65)$$

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.41) για (απόλυτα) ελεύθερη ράβδο.} \quad (6.1.66)$$

Στην τελευταία αυτή περίπτωση: της ελεύθερης ράβδου επιτρέπεται, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και η στερεά ιδιομορφή $X_0(x) = 1$ με μηδενική ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 0$: κίνηση στερεού σώματος.

Έχουμε διαθέσιμες τις ιδιομορφές $X_n(x)$ των αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου. Μπορούμε τώρα σχετικά εύκολα να αποδείξουμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητάς τους (6.1.52) και στις τέσσερις πιο πάνω περιπτώσεις χρησιμοποιώντας απλή Τριγωνομετρία και υπολογίζοντας ξανά και ξανά τα σχετικά ολοκληρώματα (6.1.52). Αυτό είναι μια πολύ ωραία άσκηση και ήδη το κάναμε στην παράγραφο αυτή στην πρώτη περίπτωση: της αμφίπακτης ράβδου. Είναι όμως «στο στυλ» του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική των Κατασκευών να χρησιμοποιείται ενιαία αντιμετώπιση του προβλήματος της απόδειξης της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών με μία απόδειξη και για τις τέσσερις πιο πάνω περιπτώσεις ράβδων. Μια κι έξω η απόδειξη: με μία προσπάθεια για όλες τις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στη ράβδο. Και χαρούμενοι προχωράμε αμέσως σ' αυτήν!

Β6.1.10. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών: η μέθοδος της Δυναμικής των Κατασκευών

Θα αποδείξουμε με γενικό τρόπο την ιδιότητα (6.1.52) ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ αξονικών ταλαντώσεων ράβδου. Την υπενθυμίζουμε

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.67)$$

Οι ιδιομορφές $X_n(x)$ μπορεί να είναι οι ιδιομορφές των σχέσεων (6.1.63), των σχέσεων (6.1.64), των σχέσεων (6.1.65) ή των σχέσεων (6.1.66) (στις τελευταίες έχουμε και την ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 0$), όχι όμως ανακατωμένα: μόνο για μία περίπτωση ράβδου, δηλαδή συνοριακών συνθηκών στη ράβδο.

Για την απόδειξη αυτή της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.10). Την ξαναγράφουμε στην ισοδύναμη μορφή της:

$$X''(x) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) \quad \text{με} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.1.68)$$

όπως ήδη ξέρουμε από τη σχέση (6.1.3) για την ταχύτητα c των αξονικών ελαστικών κυμάτων. Τη διαφορική εξίσωση (6.1.68) τη γράφουμε για τις δύο ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ (με $m \neq n$) ως εξής:

$$X_m''(x) = -\left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 X_m(x), \quad (6.1.69)$$

$$X_n''(x) = -\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 X_n(x) \quad (6.1.70)$$

με ω_m και ω_n τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Όμως, όπως ήδη γνωρίζουμε από τις σχέσεις (6.1.19), (6.1.32) και (6.1.40), οι δύο ιδιοσυχνότητες ω_m και ω_n είναι διαφορετικές μεταξύ τους για $m \neq n$. Δηλαδή δεν παρουσιάζονται διπλές ή πολλαπλές ιδιοσυχνότητες στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της βασικής σχέσεως ορθογωνιότητας (6.1.67) στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες).

Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.1.70), που αναφέρεται στην ιδιομορφή $X_n(x)$, επί την άλλη ιδιομορφή $X_m(x)$ (όμως για την ίδια συνήθη ράβδο και φυσικά με $m \neq n$). Έπειτα ολοκληρώνουμε την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.70) κατά μήκος της ράβδου: από $x = 0$ μέχρι $x = L$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^L X_m(x) X_n''(x) dx = -\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx. \quad (6.1.71)$$

Επιθυμούμε βέβαια να αποδείξουμε πως το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με το μηδέν. Δυστυχώς απαιτείται κάποιος μικρός κόπος για την κατά τα άλλα ενδιαφέρουσα αυτή απόδειξη.

Στοχεύουμε να φέρουμε το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ίδιας σχέσεως (6.1.71) σε μια απόλυτα συμμετρική μορφή και στη συνέχεια να την εκμεταλλευθούμε για την απόδειξή μας. Προς το σκοπό αυτό εκτελούμε μια παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα αυτό. Με αυτόν τον τρόπο χωρίς καμία δυσκολία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x) X_n''(x) dx &= X_m(x) X_n'(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_m'(x) X_n'(x) dx \\ &= X_m(L) X_n'(L) - X_m(0) X_n'(0) - \int_0^L X_m'(x) X_n'(x) dx. \end{aligned} \quad (6.1.72)$$

Πετύχαμε έτσι αντί να έχουμε τη μηδενική παράγωγο $X_m(x)$ (δηλαδή την ίδια τη συνάρτηση $X_m(x)$) και τη δεύτερη παράγωγο $X_n''(x)$ της συναρτήσεως $X_n(x)$ στην ολοκληρωτέα συνάρτηση $X_m(x) X_n''(x)$ να έχουμε απλά μόνο τις πρώτες παραγώγους τους $X_m'(x)$ και $X_n'(x)$ αντίστοιχα. Αυτό είναι ένα πραγματικά ενδιαφέρον συμμετρικό αποτέλεσμα.

Θα αποδείξουμε τώρα πως ο πρώτος όρος $X_m(L) X_n'(L)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72), ο οποίος αφορά στο δεξιό άκρο $x = L$ της ράβδου, είναι πάντα ίσος με το μηδέν. Πραγματικά δύο μόνο συνηθισμένες περιπτώσεις υπάρχουν για το δεξιό αυτό άκρο $x = L$: (α) να είναι στηριζόμενο (πακτωμένο) άκρο με $X(L) = 0$ και (β) να είναι ελεύθερο άκρο με $X'(L) = 0$. Επομένως μηδενίζεται είτε ο πρώτος παράγοντας $X_m(L)$ είτε ο δεύτερος παράγοντας $X_n'(L)$ στο γινόμενο $X_m(L) X_n'(L)$ της σχέσεως (6.1.72). Κατά συνέπεια και στις δύο πιο πάνω συνηθισμένες περιπτώσεις του δεξιού άκρου $x = L$ ο πρώτος αυτός όρος $X_m(L) X_n'(L)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72) είναι ίσος με μηδέν. Αυτό ισχύει είτε εξαιτίας του πρώτου παράγοντά του $X_m(L)$ είτε εξαιτίας του δευτέρου $X_n'(L)$.

Είναι προφανές πως απόλυτα ίδια είναι η κατάσταση και με το αριστερό άκρο $x = 0$ της συνήθους ράβδου μας. Στο άκρο αυτό $x = 0$ με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε αμέσως ότι ο όρος $-X_m(0) X_n'(0)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για στηριζόμενο άκρο είτε για ελεύθερο άκρο. Απόλυτα ανάλογη είναι η αιτιολόγηση και του συμπεράσματός μας αυτού.

Επομένως η σχέση (6.1.72) παίρνει τώρα που έχουν μηδενισθεί οι δύο πρώτοι όροι $X_m(L) X_n'(L)$ και $-X_m(0) X_n'(0)$ στο δεξιό μέλος της (πριν από το ολοκλήρωμα) την αρκετά πιο απλή συμμετρική

στο δεξιό μέλος της (με δύο πρώτες παραγώγους στην ολοκληρωτέα συνάρτηση) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx = - \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx. \quad (6.1.73)$$

Αυτή είναι και η τελική, η επιθυμητή για μας μορφή. Αυτό συμβαίνει, επειδή κατορθώσαμε ήδη να έχουμε συμμετρική ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεξιό μέλος, αφού προφανώς

$$X_m'(x)X_n'(x) = X_n'(x)X_m'(x), \quad \text{οπότε και} \quad \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \int_0^L X_n'(x)X_m'(x) dx. \quad (6.1.74)$$

Η συμμετρία αυτή θα γίνει εμφανής με την αντικατάσταση του ολοκληρώματος $\int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx$ στο αριστερό μέλος της βασικής μας σχέσεως (6.1.71) με τη χρήση της σχέσεως (6.1.73), στην οποία καταλήξαμε με την παραγοντική ολοκλήρωση που κάναμε. Έτσι παίρνουμε από τη σχέση (6.1.71)

$$\int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.75)$$

Πρόκειται για μια πλήρως συμμετρική σχέση (ως προς τους δείκτες m και n με $m, n = 1, 2, \dots$) και τις δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις: (α) $X_m'(x)X_n'(x) = X_n'(x)X_m'(x)$ (στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους) και (β) $X_m(x)X_n(x) = X_n(x)X_m(x)$ (στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους).

Αντίθετα δεν υπάρχει καθόλου συμμετρία ως προς την ιδιοσυχνότητα (κυκλική ιδιοσυχνότητα), εδώ υψωμένη στο τετράγωνο: ω_n^2 . Συγκεκριμένα στη σχέση αυτή (6.1.75) παρουσιάζεται μόνο η ιδιοσυχνότητα ω_n , αλλ' όχι και η ιδιοσυχνότητα ω_m . Εμείς όμως καμία απολύτως διάκριση δεν κάναμε ανάμεσα στις δύο ιδιομορφές αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων $X_m(x)$ και $X_n(x)$. Και οι δυο τους είναι δύο εξίσου αποδεκτές ιδιομορφές για την παρούσα ράβδο μας υπό δυναμική αξονική καταπόνηση. Έχουμε επομένως θαυμάσια τη δυνατότητα να θεωρήσουμε την ίδια ακριβώς σχέση (6.1.75) να ισχύει (α) με την n -ιδιομορφή $X_n(x)$ αντί για την m -ιδιομορφή $X_m(x)$ και επίσης (β) με την m -ιδιομορφή $X_m(x)$ αντί για την n -ιδιομορφή $X_n(x)$. Δηλαδή απλά θέτουμε στη σχέση αυτή (α) n αντί για m και επίσης (β) m αντί για n . Άρα εναλλάσσουμε τους δύο δείκτες m και n . Τότε βέβαια θα πρέπει να θέσουμε και ω_m^2 αντί για ω_n^2 στο δεξιό μέλος.

Με την εναλλαγή λοιπόν των δύο δεικτών m και n η ίδια βασική σχέση (6.1.75) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\int_0^L X_n'(x)X_m'(x) dx = \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \int_0^L X_n(x)X_m(x) dx. \quad (6.1.76)$$

Με τη χρήση μάλιστα της τόσο στοιχειώδους και γνωστής μας αντιμεταθετικής ιδιότητας στον απλό πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, εδώ στα γινόμενα των ολοκληρωτέων συναρτήσεων:

$$X_n'(x)X_m'(x) = X_m'(x)X_n'(x) \quad \text{και επίσης} \quad X_n(x)X_m(x) = X_m(x)X_n(x), \quad (6.1.77)$$

παίρνουμε τελικά

$$\int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.78)$$

Οδηγηθήκαμε έτσι σε ένα κάπως παράξενο, για να είμαστε ειλικρινείς σε ένα απροσδόκητο συμπέρασμα: πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο σχέσεις (6.1.75) και (6.1.78). Είναι σχεδόν ολίδιες. Η μόνη διαφορά τους συνίσταται στο γεγονός ότι η πρώτη έχει τον παράγοντα ω_n^2 στο δεξιό μέλος της, ενώ η δεύτερη έχει τον παράγοντα ω_m^2 στο ίδιο μέλος της. Αφαιρώντας τις κατά μέλη (τα αριστερά μέλη τους έτσι κι αλλιώς συμπίπτουν) και πολλαπλασιάζοντας επί c^2 (ώστε να φύγουν οι παρονομαστές), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$0 = (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.79)$$

Έχουμε όμως εξηγήσει από την αρχή ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες αξονικών (ή διαμήκων) ιδιοταλαντώσεων ω_m και ω_n είναι διαφορετικές μεταξύ τους: $\omega_m \neq \omega_n$. Καιρός είναι να το χρησιμοποιήσουμε

στην παραπάνω σχέση (6.1.79), στην οποία με κόπο καταλήξαμε. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής: (α) μία παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) και επίσης (β) τις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου μας με το καθένα τους να είναι είτε (α) στηριζόμενο (πακτωμένο) άκρο είτε (β) ελεύθερο άκρο.

Πραγματικά με $\omega_m \neq \omega_n$ η τελευταία σχέση μας (6.1.79) καταλήγει αμέσως στην τελική της και τόσο σημαντική στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.80)$$

Αυτή είναι η σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) των ιδιομορφών $X_m(x)$ (με $m = 1, 2, \dots$), την οποία αποδείξαμε. Πρόκειται για μια σχέση θεμελιώδους σημασίας. Μας είναι απόλυτα αναγκαία κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.1.1) των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων συνήθους ράβδου. Αυτό ισχύει μάλιστα είτε (α) σε ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδου: χωρίς καθόλου κατανεμημένη αξονική εξωτερική φόρτιση $f(x, t)$, δηλαδή με $f(x, t) \equiv 0$: ομογενής εξίσωση (6.1.2), είτε (β) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδου: εκεί με κατανεμημένη αξονική (ή διαμήκη) εξωτερική φόρτιση $f(x, t)$, δηλαδή με $f(x, t) \neq 0$: μη ομογενής εξίσωση (6.1.1).

Στο σημείο αυτό είναι βέβαια σκόπιμο να θυμηθούμε ξανά τον ορισμό

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad (6.1.81)$$

της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) δύο διαφορετικών συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Στη θεμελιώδους σημασίας αυτή έννοια της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) συναρτήσεων είχαμε ήδη την ευκαιρία να αναφερθούμε στην Ενότητα Α16.1 του Κεφαλαίου Α16 στο διδακτικό βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II (Μέρος Α). Εκεί, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο Α16.1.2, κάναμε επίσης ρητή αναφορά και σε πέντε συστήματα (σύνολα) ορθογωνίων πολωνύμων. Παραπέρα στο ίδιο Κεφάλαιο Α16 χρησιμοποιήσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας στις τόσο γνωστές μας πια σειρές Fourier με πάρα πολλές παραπέρα εφαρμογές. Σε τούτο το διδακτικό βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III (Μέρος Β) είδαμε αρκετές τέτοιες εφαρμογές στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Θα δούμε επίσης και άλλες στην επόμενη Ενότητα Β6.2 αυτού του Κεφαλαίου Β6 στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού.

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε επίσης μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Με τη βασική σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.1.80) να ισχύει το σχετικό ολοκλήρωμα για δύο διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ θα είναι ίσο με το μηδέν. Τότε όμως, όπως άμεσα παρατηρούμε από τη σχέση (6.1.75) ή (6.1.76) (το ίδιο κάνει!), και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα των πρώτων παραγώγων τους $X'_m(x)$ και $X'_n(x)$ αντίστοιχα θα είναι και αυτό ίσο με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_0^L X'_m(x)X'_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά και πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.82)$$

Άρα όχι μόνο οι ίδιες οι ιδιομορφές $X_n(x)$, αλλά και οι πρώτες παράγωγοί τους $X'_n(x)$ αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων σε αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου. Και μάλιστα για οποιουδήποτε συνδυασμούς συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα της. Ένα τέτοιο άκρο μπορεί να είναι είτε (α) στηριζόμενο (πακτωμένο) είτε (β) ελεύθερο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Οι δύο συνθήκες ορθογωνιότητας (6.1.80) και (6.1.82) ισχύουν σε κάθε περίπτωση ράβδου!

Ακολουθούν τρεις πολύ σημαντικές παρατηρήσεις για τον Πολιτικό Μηχανικό στην Επιστήμη του, εδώ φυσικά στην περιοχή της Δυναμικής των Κατασκευών για συνεχή (όχι διακριτά) μηχανικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού: εδώ για γραμμικούς φορείς και συγκεκριμένα ράβδους:

► **Παρατήρηση Β6.2:** Οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ γενικεύονται και όταν η δυστένεια EA ή/και η γραμμική πυκνότητα ρA της ράβδου δεν είναι σταθερές (η μία ή η άλλη ή και οι δύο μαζί) κατά μήκος της. Δε θα υπεισέλθουμε όμως στις σχετικές λεπτομέρειες.

► **Παρατήρηση Β6.3:** Η πιο πάνω απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ταλαντώσεως στη σχέση (6.1.80) υπήρξε μια καθαρά μαθηματική απόδειξη. Είναι όμως δυνατόν η ίδια απόδειξη να βασισθεί και στη Μηχανική, συγκεκριμένα στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell, αν και στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ προτιμήθηκε η μαθηματική απόδειξη. Αυτή ακριβώς είναι η προτίμηση και στα περισσότερα συγγράμματα Δυναμικής των Κατασκευών.

► **Παρατήρηση Β6.4:** Όλες αυτές οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας ισχύουν για $m \neq n$: για δύο διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$. Για $m = n$ ασφαλώς και δεν περιμένουμε να ισχύει η ορθογωνιότητα της ιδιομορφής $X_n(x)$ με τον εαυτό της. Κάτι τέτοιο θα ήταν σοβαρό σφάλμα μας και θα οδηγούσε σε φοβερά υπολογιστικά λάθη. Στην ειδική αυτή περίπτωση $m = n$ απλά έχουμε

$$N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.83)$$

Οι προφανώς θετικές ποσότητες N_n , οι οποίες έχουν ορισθεί στην προηγούμενη σχέση (6.1.83), καλούνται **νόρμες των ιδιομορφών ταλαντώσεων**. Για να αποφύγει αυτές τις νόρμες, ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί γενικά στη θέση τους τις ποσότητες $M_n := \rho A N_n$, δηλαδή τις ποσότητες

$$M_n = \rho A \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{πάλι με} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1.84)$$

ακόμη και όταν μελετάει συνήθεις ράβδους. Με ρA τη γραμμική πυκνότητα της συνήθους ράβδου, τις ιδιομορφές $X_n(x)$ αδιάστατες συναρτήσεις και ολοκλήρωση κατά μήκος της ράβδου ($0 \leq x \leq L$) είναι προφανές ότι η φυσική διάσταση των νέων αυτών ποσοτήτων M_n είναι γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) της ράβδου επί μήκος, κατά συνέπεια μάζα. Οι ποσότητες αυτές M_n καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **γενικευμένες μάζες** εδώ για αξονικές ταλαντώσεις.

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή για την ορθογωνιότητα των ιδιομορφών $X_n(x)$ αξονικών ταλαντώσεων συνήθους ράβδου σημειώνουμε ότι αντίστοιχη ιδιότητα ορθογωνιότητας ισχύει και για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ (υιοθετούμε τον ίδιο συμβολισμό) καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Τη σχετική απόδειξη, που είναι μάλιστα κάπως πιο δύσκολη, επειδή χρειάζεται δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις αντί για μία εδώ, θα την κάνουμε λεπτομερώς στην Παράγραφο Β6.2.4 παρακάτω.

Β6.1.11. Η μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιομορφές

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ξανά την αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1)

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6.1.85)$$

η οποία διέπει τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Οι δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου έχουν ληφθεί υπόψη στις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$: συνοπτικά στις σχέσεις (6.1.63) έως (6.1.66). Με τις ιδιομορφές αυτές $X_n(x)$ είμαστε σίγουροι για την επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών. Διαθέτουμε βέβαια και δύο αρχικές συνθήκες (για $t = 0$): την αρχική αξονική θέση $u(x, 0)$ και την αρχική αξονική ταχύτητα $\dot{u}(x, 0)$ των σημείων της ράβδου, συγκεκριμένα

$$u(x, 0) = \hat{f}(x) \quad \text{και} \quad \dot{u}(x, 0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (6.1.86)$$

με τις δύο συναρτήσεις $\hat{f}(x)$ και $g(x)$ γνωστές και να σέβονται μάλιστα τις δύο συνοριακές συνθήκες.

Ασφαλώς το επόμενο βήμα μας θα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας πια (από την Παράγραφο Β5.6.2 της Ενότητας Β5.6) **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**, που εδώ δίκαια την αποκαλούμε **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές**. (Αυτό το κάνουμε, γιατί οι ιδιοσυναρτήσεις μας είναι εδώ οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$.) Κατά συνέπεια δεχόμαστε σαν λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης (6.1.85) των αξονικών ταλαντώσεων ράβδου τη συνάρτηση

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (6.1.87)$$

Γενικεύουμε έτσι τη σχετική ημιτονική λύση (5.6.9), που είχαμε δεχθεί στην Παράγραφο Β5.6.2 για τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). (Δηλαδή εδώ τα πράγματα είναι λίγο πιο δύσκολα με τις ιδιομορφές $X_n(x)$ στη θέση των ιδιοσυναρτήσεων $\sin(n\pi x/L)$ στην εξίσωση της διαχύσεως.) Οι ιδιομορφές $X_n(x)$ μας είναι γνωστές, ενώ οι χρονικές συναρτήσεις $q_n(t)$, που καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **κύριες συντεταγμένες** (ή **κανονικές συντεταγμένες** ή **συντεταγμένες των τρόπων ταλαντώσεως**), μας είναι άγνωστες και πρέπει να προσδιορισθούν.

Και τώρα η αντικατάσταση της λύσεως (6.1.87) που υποθέσαμε στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.85). Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τη δεύτερη χωρική μερική παράγωγο $u''(x, t)$ καθώς και τη δεύτερη χρονική μερική παράγωγο $\ddot{u}(x, t)$. Παραγωγίζουμε λοιπόν το ανάπτυσμα σε ιδιομορφές (6.1.87) που έχουμε υποθέσει σαν λύση $u(x, t)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι

$$u''(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''(x) \quad \text{και επίσης} \quad \ddot{u}(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.1.88)$$

Την πρώτη από τις μερικές αυτές παραγώγους μπορούμε να τη γράψουμε και σε λίγο απλούστερη μορφή παίρνοντας υπόψη μας τη χωρική διαφορική εξίσωση (6.1.68) στη μορφή της (6.1.70) για την n -στή ιδιομορφή $X_n(x)$: $X_n''(x) = -(\omega_n/c)^2 X_n(x)$. Με τον τρόπο αυτό διώχνουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο $X_n''(x)$ στην πρώτη σχέση (6.1.88) και τη γράφουμε στην απλούστερη μορφή της

$$u''(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x) = -\frac{\rho}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x), \quad \text{αφού} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.1.89)$$

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι! Αντικαθιστούμε τις μερικές παραγώγους $u''(x, t)$ από τη σχέση (6.1.89) και $\ddot{u}(x, t)$ από τη δεύτερη σχέση (6.1.88) στη διαφορική μας εξίσωση (6.1.85). Έτσι παίρνουμε

$$-EA \frac{\rho}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x) + f(x, t) = \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.1.90)$$

Τέλος κάνουμε την απλοποίηση $EA(\rho/E) = \rho A$ και αναδιατάσσουμε τους όρους στην εξίσωση αυτή συμπτύσσοντας μάλιστα τις δύο σειρές (που φυσικά τις υποθέτουμε ότι συγκλίνουν) σε μία μόνο σειρά. Έτσι βρίσκουμε

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x) = f(x, t) \quad (6.1.91)$$

χωρίς να ξεχνάμε ότι υπάρχουν και οι δύο αρχικές συνθήκες (6.1.86): $u(x, 0) = \hat{f}(x)$, $\dot{u}(x, 0) = g(x)$.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε ένα μεγάλο διάλειμμα. Με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές φέραμε τη διαφορική εξίσωση (6.1.85) των αξονικών ταλαντώσεων συνήθους ράβδου στη μορφή (6.1.91) με τις ιδιομορφές $X_n(x)$ γνωστές και μάλιστα να αποτελούν σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων κατά μήκος της ράβδου. Τώρα στην αμέσως επόμενη Ενότητα Β6.2 θα κάνουμε την ίδια ακριβώς εργασία και στην αρκετά πιο δύσκολη περίπτωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. (Θυμίζουμε ότι συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί τον όρο **ράβδος** αντί για τον όρο **δοκός**, όπως κάνουμε και εδώ, απλά όταν δεν έχει κάθετη, καμπτική φόρτιση.) Θα προσδιορίσουμε και εκεί τις ιδιομορφές $X_n(x)$ (που όμως δεν είναι τόσο απλές) και θα αποδείξουμε και γι' αυτές την ορθογωνιότητά τους. Τελικά θα καταλήξουμε στην εξίσωση (6.2.127), που είναι ακριβώς η ίδια εξίσωση (6.1.91) απλά με το συμβολισμό $p(x, t)$ για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση της δοκού αντί (εδώ) για το συμβολισμό $f(x, t)$ για την κατανεμημένη αξονική φόρτιση της ράβδου.

Κι αμέσως μετά, από το Εδάφιο Β6.2.6.4 και μετά, θα λύσουμε την εξίσωση (6.2.127), που συμπύπτει όπως είπαμε με την (6.1.91), για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ειδική περίπτωση στο τέλος τις ελεύθερες ταλαντώσεις. Υπομονή λοιπόν, ώστε να μπορέσουμε να φέρουμε και το πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού εκεί όπου ήδη φέραμε το πρόβλημα των εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων ράβδου: στην εξίσωση (6.1.91). Υπομονή χωρίς μάλιστα να ξεχνάμε πως στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού οι καμπτικές ταλαντώσεις δοκού είναι πιο σημαντικές από τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου, που είναι όμως μαθηματικά απλούστερες.

B6.2. ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

B6.2.1. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

Οι δοκοί αποτελούν έναν ιδιαίτερα σημαντικό γραμμικό φορέα του Πολιτικού Μηχανικού στις κατασκευές του. Εδώ θα επιλύσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της συνήθους δοκού στο δυναμικό πρόβλημα των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και του αναπτύγματος σε **ιδιοσυναρτήσεις**, οι οποίες προηγουμένως σε ράβδο και εδώ σε δοκό καλούνται συνήθως **ιδιομορφές ταλαντώσεων** και απλούστερα **ιδιομορφές**. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση (6.2.1) είναι θεμελιώδης εξίσωση στη Δυναμική των Κατασκευών και μας είναι πάρα πολύ καλά γνωστή ήδη από την Ενότητα Β1.1: εξισώσεις (1.1.5) και (1.1.13). Υπενθυμίζουμε επίσης ότι σ' αυτήν οι ποσότητες EI και ρA είναι η **δυσκαμψία** της δοκού και η **γραμμική πυκνότητά** της αντίστοιχα. Και τις δυο τις θεωρούμε εδώ σε συνήθη δοκό σταθερές. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως (η κάθετη μετατόπιση) $v(x, t)$ κατά μήκος της δοκού (με x τη θέση και t το χρόνο), ενώ η συνάρτηση $p(x, t)$ είναι γνωστή και δηλώνει την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση επίσης κατά μήκος της δοκού.

Η διαφορική αυτή εξίσωση (6.2.1) συνοδεύεται από τέσσερις συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε άκρο της δοκού, εδώ στα άκρα $x = 0$ και $x = L$. Ισχύουν επίσης και δύο αρχικές συνθήκες που αφορούν στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$. Σε όλες αυτές τις συνθήκες θα αναφερθούμε πιο κάτω.

Εδώ απλά τονίζουμε τη χρησιμότητα του παρόντος προβλήματος για τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος πάρα πολύ συχνά χρησιμοποιεί και δοκούς στις κατασκευές του. Εξίσου συχνά συναντάει και δυναμικά φαινόμενα, π.χ. σε δοκούς υπό την επιρροή του ανέμου, κινούμενων φορτίων (όπως οχημάτων πάνω σε μια γέφυρα) και σεισμικών φαινομένων. Όλα αυτά πρέπει να τα λαμβάνει έγκαιρα υπόψη στις μελέτες του για τις κατασκευές του και ασφαλώς δε μπορεί να τα αγνοεί. Με την έννοια αυτή η παρούσα ενότητα για τις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού κρίνεται πολύ σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό. Επομένως ίσως θα ήταν ουσιαστικό σφάλμα η παράλειψή της στο παρόν διδακτικό βιβλίο Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς.

B6.2.2. Χωρισμός των μεταβλητών

Για την πιο πάνω γραμμική και με σταθερούς συντελεστές διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.1) θα εφαρμόσουμε καταρχήν το χωρισμό των μεταβλητών x και t στην αντίστοιχη ομογενή (χωρίς φόρτιση: $p(x, t) \equiv 0$) διαφορική εξίσωση, δηλαδή στην εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{πάλι με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.2)$$

Προφανώς με μεταβλητές τη θέση x κατά μήκος της δοκού ($0 \leq x \leq L$) και το χρόνο t ($t \geq 0$) πρέπει να θέσουμε

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.2.3)$$

Έτσι η άγνωστη συνάρτηση $v(x, t)$ διαχωρίζεται σε μια χωρική συνάρτηση $X(x)$ και σε μια χρονική συνάρτηση $T(t)$. Εκτελώντας τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις, διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = X''''(x)T(t) \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x)\ddot{T}(t) \quad (6.2.4)$$

με τους τόνους να υποδηλώνουν χωρικές μερικές παραγώγους και τις τελείες χρονικές μερικές παραγώγους. Παρενθετικά σημειώνουμε και τους συμβολισμούς

$$v''''(x, t) := \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \quad \ddot{v}(x, t) := \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.2.5)$$

τους οποίους αρκετά συχνά υιοθετεί ο Πολιτικός Μηχανικός στη Δυναμική των Κατασκευών. Εντούτοις εμείς για περισσότερη σαφήνεια θα αποφύγουμε τη χρήση τους.

Δεν έχουμε τώρα παρά να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους (6.2.4) στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2). Έτσι προκύπτει άμεσα ότι

$$EI X''''(x)T(t) + \rho A X(x)\ddot{T}(t) = 0. \quad (6.2.6)$$

Διαιρώντας τώρα με το γινόμενο $v(x, t) = X(x)T(t)$ (υποθέτοντάς το συνεχώς διάφορο του μηδενός), διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$EI \frac{X''''(x)}{X(x)} + \rho A \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0. \quad (6.2.7)$$

Τώρα διαιρούμε δια ρA , μεταφέρουμε το χρονικό κλάσμα $\ddot{T}(t)/T(t)$ στο δεξιό μέλος και εισάγουμε τέλος τη **σταθερά διαχωρισμού** $\lambda = \omega^2$, εδώ θετική: ω^2 . Έτσι παίρνουμε

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{X''''(x)}{X(x)} = - \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2. \quad (6.2.8)$$

Είναι τώρα, με $v(x, t) = X(x)T(t)$, προφανές ότι έχουμε καταλήξει (φυσικά με την παρούσα μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών) στις δύο ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$X''''(x) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} X(x) = 0 : \quad \text{χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση,} \quad (6.2.9)$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 : \quad \text{χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση.} \quad (6.2.10)$$

Μας είναι πολύ απλή (και φυσικά γνωστή!) η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.10). Η γενική λύση της είναι βέβαια τριγωνομετρικής μορφής (και χωρίς απόσβεση μάλιστα!)

$$T(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t = G \cos(\omega t - \alpha), \quad (6.2.11)$$

αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μόνο τριγωνομετρικό όρο με γωνία φάσεως α . (Φυσικά τα δύο σύμβολα E και F ή, εναλλακτικά, τα δύο σύμβολα G και α δηλώνουν αυθαίρετες σταθερές.)

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι ήταν πραγματικά χρήσιμο να διαιρέσουμε την εξίσωση (6.2.7) με τη γραμμική πυκνότητα ρA . Πιο σημαντικό είναι όμως να τονίσουμε ότι ήταν *απόλυτα αναγκαίο* να υποθέσουμε τη σταθερά διαχωρισμού $\lambda = \omega^2$ (θετική σταθερά λ και ίση με ω^2). Έτσι κατορθώσαμε να καταλήξουμε στη γενική λύση (6.2.11) της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.10) με παράμετρο την κυκλική συχνότητα ω των ταλαντώσεων πέρα από τις δύο αυθαίρετες σταθερές E και F (ή G και α). Αλίμονο, αν δεν είχαμε καταλήξει σε τριγωνομετρική λύση σε αφόρτιση δοκό (σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις). Θα είχαμε έτσι παραβιάσει κατάφωρα την αρχή διατηρήσεως της ενεργείας με υπερβολικές συναρτήσεις (υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο) στη λύση αυτή (6.2.11) (για $\lambda = -\omega^2$) ή και με γραμμική λύση (για $\lambda = 0$). Εντούτοις μόνο η τριγωνομετρική λύση (6.2.11) (για $\lambda = \omega^2$) είναι αποδεκτή από φυσικής απόψεως και επομένως υιοθετείται. Η ίδια λύση (για $\lambda = \omega^2$, θετικό λ) θα είναι ουσιαστικά αυτή που θα μας επιτρέψει να λάβουμε παρακάτω σωστά υπόψη μας και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις.

Τώρα όσον αφορά στη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.9), που την ξαναγράφουμε και στην απλούστερη μορφή

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}, \quad (6.2.12)$$

μας είναι και αυτή γνωστή από την Ενότητα Α9.2 του διδακτικού βιβλίου Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς. Υπενθυμίζουμε κι εδώ τη γνωστή μας εκθετική αντικατάσταση $X_0(x) = e^{\mu x}$ κι έπειτα τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση η οποία προκύπτει με τη μέθοδο αυτή:

$$\mu^4 - \beta^4 = 0, \quad \text{ισοδύναμα} \quad (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0. \quad (6.2.13)$$

Η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση έχει προφανώς τέσσερις ρίζες, της εξής:

$$\mu_{1,2} = \pm\beta \quad \text{και} \quad \mu_{3,4} = \pm i\beta. \quad (6.2.14)$$

Στην Ενότητα Α9.2 είχαμε επίσης εύκολα προσδιορίσει τη γενική λύση (9.2.17) της διαφορικής εξίσωσης (6.2.12):

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.15)$$

Η λύση αυτή περιλαμβάνει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις A , B , C και D . Αυτό είναι αναμενόμενο για μια γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, όπως είναι η εξίσωση (6.2.12).

Οι τέσσερις αυτές σταθερές A , B , C και D μπορούν ασφαλώς να προσδιορισθούν από τις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού. Ειδικά για την αμφιέριστη δοκό είχαμε βρει στην Ενότητα Α9.2, σχέσεις (9.2.34) τις **ιδιοσυναρτήσεις** (που στις ράβδους και στις δοκούς καλούνται, όπως γνωρίζουμε καλά, **ιδιομορφές ταλαντώσεως** και πιο απλά **ιδιομορφές**)

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ή απλούστερα με } D_n = 1: \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.16)$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι μόνο ο ημιτονικός όρος $D \sin \beta x$ της γενικής λύσεως (6.2.15) έχει απομείνει σ' αυτήν την ειδική περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού.

Β6.2.3. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών

Είναι προφανές ότι για τις ημιτονικές ιδιομορφές $X_n(x)$ στις σχέσεις (6.2.16) ισχύει η **ορθογωνιότητα** (ή **ορθογωνικότητα**) στο διάστημα $[0, L]$ της δοκού. Αυτό το ξέρουμε ήδη από τις σειρές Fourier (Κεφάλαιο Α16) και είχαμε την ευκαιρία να το χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο Β5 καθώς και στην προηγούμενη Ενότητα Β6.1 για ράβδους. Η ιδιότητα αυτή είναι επαρκής για την αμφιέριστη δοκό (που είναι έτσι η υπολογιστικά ευκολότερη δοκός) στην επίλυση του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Εντούτοις δε μας είναι επαρκής για άλλους τρόπους στηρίξεως της δοκού: (α) αμφίπακτη δοκό, (β) πρόβολο και (γ) δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο της και με κύλιση στο άλλο. Επίσης για τις δύο στατικά απαράδεκτες δοκούς: (δ) με απλή στήριξη στο ένα άκρο και ελεύθερο το άλλο και (ε) με ελεύθερα και τα δύο άκρα. (Αυτές οι στατικά απαράδεκτες δοκοί είναι εντούτοις αποδεκτές στη Δυναμική των Κατασκευών. Εκεί η κίνηση μιας δοκού καταρχήν επιτρέπεται!) Η ανεπάρκεια αυτή των σειρών Fourier παρουσιάζεται, επειδή, όπως θα δούμε παρακάτω, σε όλες τις παραπάνω δοκούς με εξαίρεση την αμφιέριστη δοκό οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ δεν έχουν πια την απλή τριγωνομετρική μορφή (6.2.16): έχουν πολύπλοκες μορφές. Αυτό θα το διαπιστώσουμε στην Παράγραφο Β6.2.5.

Στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.4 θα αποδείξουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις συνήθων στηρίξεων/ελλείψεως στηρίξεως στα δύο άκρα μιας δοκού: (α) πάκτωση, (β) απλή στήριξη (άρθρωση ή κύλιση) και (γ) ελεύθερο άκρο (για κάθε συνδυασμό των στηρίξεων αυτών) οι ιδιομορφές $X_n(x)$ κατά μήκος της δοκού είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{με } m \neq n \quad \text{και } m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.17)$$

για δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ μιας συνήθους δοκού με το αριστερό άκρο της $x = 0$ με πάκτωση, απλή στήριξη ή ελεύθερο και ανάλογα και για το δεξιό άκρο της $x = L$.

Στην απόδειξη αυτή θα υποθέσουμε ότι οι δύο διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ στη σχέση ορθογωνιότητας (6.2.17) αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοσυχνότητες ω_m και ω_n της δοκού: $\omega_m \neq \omega_n$. Όμως η ιδιότητα ορθογωνιότητας (6.2.17) μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει και στις εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις δύο διαφορετικών ιδιομορφών $X_m(x) \neq X_n(x)$ που αντιστοιχούν όμως σε μια πολλαπλή ιδιοσυχνότητα $\omega_m = \omega_n$. Φυσικά η παρατήρηση αυτή δεν αφορά

στην αμφιέριστη δοκό, όπου, όπως γνωρίζουμε από την Ενότητα Α9.2, οι ιδιοσυχνότητές της

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.18)$$

(σχέσεις (9.2.33) της Παραγράφου Α9.2.3) είναι σίγουρα διακριτές: διαφορετικές μεταξύ τους.

Πριν προχωρήσουμε στην παρούσα απόδειξη (στην αμέσως επόμενη Παράγραφο Β6.2.4), ας επαναλάβουμε τις τόσο γνωστές μας συνοριακές συνθήκες σε ένα οποιοδήποτε άκρο $x = a$ συνήθους δοκού. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} X(a) = 0 \quad \text{και} \quad X'(a) = 0 & \text{ για πακτωμένο άκρο δοκού,} \\ X(a) = 0 \quad \text{και} \quad X''(a) = 0 & \text{ για απλά στηριζόμενο άκρο δοκού: άρθρωση ή κύλιση,} \\ X''(a) = 0 \quad \text{και} \quad X'''(a) = 0 & \text{ για ελεύθερο άκρο δοκού.} \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Εννοείται ότι εξαιτίας του χωρισμού των μεταβλητών (6.2.3): $v(x, t) = X(x)T(t)$ ισχύουν τα εξής:

1. Η συνοριακή συνθήκη $X(a) = 0$ εκφράζει μηδενικό βέλος κάμψεως (εγκάρσια, κάθετη μετατόπιση) $v(a, t) = 0$ στο άκρο αυτό $x = a$.
2. Η συνοριακή συνθήκη $X'(a) = 0$ εκφράζει μηδενική κλίση (ή γωνία κλίσεως $\theta(a, t) = 0$ ή στροφή) στο άκρο $x = a$ που θεωρούμε.
3. Η συνοριακή συνθήκη $X''(a) = 0$ εκφράζει μηδενική ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) $M(a, t) = 0$ στο άκρο $x = a$ που εξετάζουμε.
4. Τέλος η συνοριακή συνθήκη $X'''(a) = 0$ εκφράζει μηδενική τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(a, t) = 0$ (ή $V(a, t) = 0$) στο ίδιο άκρο $x = a$.

Δεχόμαστε λοιπόν ότι κάποιο ζεύγος από τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ισχύει για το αριστερό άκρο $a = 0$ της συνήθους δοκού που μελετάμε, ενώ το ίδιο ή κάποιο άλλο ζεύγος συνοριακών συνθηκών ισχύει για το δεξιό άκρο $x = L$ της ίδιας δοκού.

Β6.2.4. Απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών

Μετά από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη Παράγραφο Β6.2.3 είμαστε τώρα πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ορθογωνιότητας του συστήματος των ιδιομορφών $X_n(x)$ στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και στις ελεύθερες ταλαντώσεις μιας συνήθους δοκού. Δηλαδή θα προχωρήσουμε στην απόδειξη της σχέσεως ορθογωνιότητας (6.2.17), την επαναλαμβάνουμε

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{με } m \neq n \quad \text{και } m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.20)$$

Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη χωρική μας συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12). Την επαναλαμβάνουμε:

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με } \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}. \quad (6.2.21)$$

Τη διαφορική αυτή εξίσωση τη γράφουμε για τις δύο ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ (με $m \neq n$) ως εξής:

$$X_m''''(x) = \beta_m^4 X_m(x) \quad \text{με } \beta_m = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_m^2}{EI}}, \quad (6.2.22)$$

$$X_n''''(x) = \beta_n^4 X_n(x) \quad \text{με } \beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}. \quad (6.2.23)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κάνουμε και την υπόθεση ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες ω_m και ω_n που αντιστοιχούν στις δύο βοηθητικές σταθερές β_m και β_n αντίστοιχα είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Άρα με την επιπλέον αυτή υπόθεση θα έχουμε

$$\omega_m \neq \omega_n, \quad \text{οπότε και } \beta_m \neq \beta_n. \quad (6.2.24)$$

Είμαστε τώρα πανέτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της τόσο βασικής στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) σχέσεως ορθογωνιότητας (6.2.20).

Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.23), που αναφέρεται στην ιδιομορφή $X_n(x)$, επί την άλλη ιδιομορφή $X_m(x)$ (για την ίδια συνήθη δοκό και φυσικά με $m \neq n$). Μετά ολοκληρώνουμε την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.23) κατά μήκος της δοκού: από $x = 0$ μέχρι $x = L$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = \beta_n^4 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx. \quad (6.2.25)$$

Επιθυμούμε ασφαλώς να αποδείξουμε πως το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με το μηδέν. Δυστυχώς απαιτείται κάποιος κόπος για την κατά τα άλλα ενδιαφέρουσα αυτή απόδειξη.

Στοχεύουμε να φέρουμε το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ίδιας σχέσεως (6.2.25) σε μια πλήρως συμμετρική μορφή και στη συνέχεια να την εκμεταλλευθούμε για την απόδειξή μας. Προς το σκοπό αυτό εκτελούμε μια παραγοντική ολοκλήρωση (ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα αυτό. Κατ' αυτόν τον τρόπο χωρίς καμία δυσκολία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx &= X_m(x) X_n''''(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_m'(x) X_n''''(x) dx \\ &= X_m(L) X_n''''(L) - X_m(0) X_n''''(0) - \int_0^L X_m'(x) X_n''''(x) dx. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Με τον τρόπο αυτό πετύχαμε αντί να έχουμε τη μηδενική παράγωγο $X_m(x)$ (δηλαδή την ίδια τη συνάρτηση $X_m(x)$) και την τέταρτη παράγωγο $X_n''''(x)$ (για τη συνάρτηση $X_n(x)$) στην ολοκληρωτέα συνάρτηση $X_m(x) X_n''''(x)$ να έχουμε τελικά την πρώτη παράγωγο $X_m'(x)$ καθώς και την τρίτη παράγωγο $X_n''''(x)$ αντίστοιχα. Μια ακόμη παραγοντική ολοκλήρωση και θα έχουμε οδηγηθεί σε δεύτερες παραγώγους $X_m''(x)$ και $X_n''(x)$ και για τις δύο αυτές συναρτήσεις $X_m(x)$ και $X_n(x)$ αντίστοιχα. Αυτό θα είναι ένα πραγματικά ενδιαφέρον συμμετρικό αποτέλεσμα.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο πρώτος όρος $X_m(L) X_n''''(L)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26), ο οποίος αφορά στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού, ισούται με το μηδέν. Πραγματικά τρεις μόνο συνηθισμένες περιπτώσεις υπάρχουν για το άκρο αυτό $x = L$: (α) Καταρχήν οι δύο πρώτες περιπτώσεις (6.2.19): πακτωμένο άκρο και απλά στηριζόμενο άκρο (άρθρωση ή κύλιση) και οι δυο τους με $X(a) = 0$, εδώ με $X(L) = 0$ στο δεξιό αυτό άκρο $a = L$ της δοκού: μηδενικό βέλος κάμψεως. Άρα μηδενίζεται ο πρώτος παράγοντας $X_m(L)$ στο γινόμενο $X_m(L) X_n''''(L)$ (εξαιτίας της ιδιομορφής $X_m(x)$ της δοκού μας). (β) Τέλος η τρίτη περίπτωση (6.2.19): ελεύθερο άκρο, αυτή με $X'''(a) = 0$, εδώ με $X'''(L) = 0$ στο δεξιό άκρο $a = L$ της δοκού που θεωρούμε: μηδενική τέμνουσα δύναμη. Άρα μηδενίζεται ο δεύτερος παράγοντας $X_n''''(L)$ στο ίδιο γινόμενο $X_m(L) X_n''''(L)$ (τώρα όμως εξαιτίας της ιδιομορφής $X_n(x)$ της δοκού μας). Κατά συνέπεια σε κάθε συνηθισμένη περίπτωση του δεξιού άκρου $x = L$: (i) πάκτωση, (ii) απλή στήριξη (έδραση): άρθρωση ή κύλιση και (iii) ελεύθερο άκρο ο πρώτος αυτός όρος $X_m(L) X_n''''(L)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26) είναι ίσος με το μηδέν. Αυτό συμβαίνει είτε εξαιτίας του πρώτου παράγοντά του $X_m(L)$ είτε εξαιτίας του δεύτερου $X_n''''(L)$.

Είναι προφανές πως απόλυτα ίδια είναι η κατάσταση και με το αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού, εκεί με $a = 0$. Στο άκρο αυτό με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε άμεσα από τα ζεύγη των συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ότι ο όρος $-X_m(0) X_n''''(0)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για πάκτωση είτε για απλή στήριξη (άρθρωση ή κύλιση) είτε για ελεύθερο άκρο. Απόλυτα ανάλογη είναι η αιτιολόγηση και του συμπεράσματός μας αυτού.

Επομένως η σχέση (6.2.26) παίρνει τώρα που έχουν μηδενισθεί οι δύο πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της (πριν από το ολοκλήρωμα) την αρκετά απλούστερη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = - \int_0^L X_m'(x) X_n''''(x) dx. \quad (6.2.27)$$

Στη μορφή αυτή η μηδενική παράγωγος $X_m(x)$ στην ιδιομορφή $X_m(x)$ (δηλαδή η ίδια η ιδιομορφή αυτή!) και η τέταρτη παράγωγος $X_n''''(x)$ στην ιδιομορφή $X_n(x)$ έχουν πλέον μετατραπεί σε πρώτη παράγωγος $X_m'(x)$ και σε τρίτη παράγωγος $X_n'''(x)$ αντίστοιχα.

Με μια ακόμη παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη), τώρα στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.27), οδηγούμαστε στη συμμετρική περίπτωση δύο δευτέρων παραγώγων στην ολοκληρωτέα συνάρτηση εκεί. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m'(x) X_n'''(x) dx &= X_m'(x) X_n''(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx \\ &= X_m'(L) X_n''(L) - X_m'(0) X_n''(0) - \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx, \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

οπότε η προηγούμενη σχέση (6.2.27) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = -X_m'(L) X_n''(L) + X_m'(0) X_n''(0) + \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx. \quad (6.2.29)$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και πάλι στο δεξιό μέλος οι δύο πρώτοι όροι $-X_m'(L) X_n''(L)$ και $X_m'(0) X_n''(0)$ είναι ίσοι με το μηδέν. Γιατί; Ας εξετάσουμε πρώτα τον πρώτο όρο $-X_m'(L) X_n''(L)$ για τις τρεις συνηθισμένες περιπτώσεις του δεξιού αυτού άκρου $x = L$ της δοκού με συνοριακές συνθήκες (6.2.19): (α) Πρώτα-πρώτα η πρώτη περίπτωση: πακτωμένο άκρο, αυτή με $X'(a) = 0$, εδώ με $X'(L) = 0$ στο δεξιό άκρο $a = L$ της δοκού που θεωρούμε: μηδενική κλίση (ή γωνία κλίσεως ή στροφή) στο άκρο αυτό. Άρα έχουμε μηδενισμό του όρου (του γινομένου) $-X_m'(L) X_n''(L)$ από τον πρώτο παράγοντά του $X_m'(L)$ (εξαιτίας της ιδιομορφής $X_m(x)$ της δοκού μας). (β) Έπειτα οι δύο άλλες περιπτώσεις: απλά στηριζόμενο άκρο (άρθρωση ή κύλιση) και ελεύθερο άκρο και οι δυο τους με $X''(a) = 0$, εδώ με $X''(L) = 0$ στο δεξιό άκρο $a = L$ της δοκού: μηδενική ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) στο άκρο αυτό. Κατά συνέπεια έχουμε και πάλι μηδενισμό του όρου (του γινομένου) $-X_m'(L) X_n''(L)$, τώρα όμως ο μηδενισμός αυτός οφείλεται στο δεύτερο παράγοντά του $X_n''(L)$ (εξαιτίας της ιδιομορφής $X_n(x)$ της δοκού μας). Επομένως σε κάθε συνηθισμένη περίπτωση του δεξιού άκρου $x = L$: (i) πάκτωση, (ii) απλή στήριξη (έδραση): άρθρωση ή κύλιση και (iii) ελεύθερο άκρο ο πρώτος αυτός όρος $-X_m'(L) X_n''(L)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.29) ισούται με το μηδέν.

Απόλυτα ίδια είναι ξανά η κατάσταση και με το αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού, εκεί με $a = 0$. Στο άκρο αυτό με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε άμεσα από τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ότι ο όρος $X_m'(0) X_n''(0)$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.29) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για πάκτωση είτε για απλή στήριξη είτε για ελεύθερο άκρο. Και πάλι ισχύει η ίδια αιτιολόγηση του συμπεράσματός μας αυτού.

Κατά συνέπεια η σχέση (6.2.29) παίρνει τώρα που μηδενίσθηκαν οι δύο πρώτοι όροι $-X_m'(L) X_n''(L)$ και επίσης $X_m'(0) X_n''(0)$ στο δεξιό μέλος της την αρκετά απλούστερη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx. \quad (6.2.30)$$

Αυτή είναι και η τελική, η επιθυμητή για μας μορφή. Αυτό συμβαίνει, επειδή ήδη κατορθώσαμε να έχουμε συμμετρική ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεξιό μέλος, αφού προφανώς

$$X_m''(x) X_n''(x) = X_n''(x) X_m''(x), \quad \text{οπότε και} \quad \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx = \int_0^L X_n''(x) X_m''(x) dx. \quad (6.2.31)$$

Η συμμετρία αυτή θα γίνει εμφανής με την αντικατάσταση του ολοκληρώματος $\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx$ στο αριστερό μέλος της βασικής μας σχέσεως (6.2.25) με τη χρήση της σχέσεως (6.2.30), στην οποία καταλήξαμε με τις δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις. Έτσι παίρνουμε τελικά από τη σχέση (6.2.25)

$$\int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx = \beta_n^4 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx. \quad (6.2.32)$$

Πρόκειται για μια απόλυτα συμμετρική σχέση (ως προς τους δείκτες m και n με $m, n = 1, 2, \dots$) και τις δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις: (α) $X_m''(x)X_n''(x) = X_n''(x)X_m''(x)$ (στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους) και (β) $X_m(x)X_n(x) = X_n(x)X_m(x)$ (στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους).

Αντίθετα δεν υπάρχει καθόλου συμμετρία ως προς τη σταθερά β_n , εδώ υψωμένη στην τέταρτη δύναμη: β_n^4 . Συγκεκριμένα στη σχέση αυτή (6.2.32) παρουσιάζεται μόνο η σταθερά β_n , αλλ' όχι και η σταθερά β_m . Εμείς όμως καμία απολύτως διάκριση δεν έχουμε κάνει ανάμεσα στις δύο ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων $X_m(x)$ και $X_n(x)$. Και οι δυο τους είναι δύο εξίσου αποδεκτές ιδιομορφές για την παρούσα δοκό μας υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση. Μπορούμε επομένως θαυμάσια να θεωρήσουμε την ίδια ακριβώς σχέση (6.2.32) να ισχύει (α) με την n -ιδιομορφή $X_n(x)$ αντί για την m -ιδιομορφή $X_m(x)$ και επίσης (β) με την m -ιδιομορφή $X_m(x)$ αντί για την n -ιδιομορφή $X_n(x)$. Δηλαδή απλά θέτουμε στη σχέση αυτή (α) n αντί m και επίσης (β) m αντί n . Επομένως εναλλάσσουμε τους δύο δείκτες m και n . Τότε βέβαια θα πρέπει να θέσουμε και β_m^4 αντί για β_n^4 στο δεξιό μέλος.

Με την εναλλαγή λοιπόν των δύο δεικτών m και n η ίδια θεμελιώδης σχέση (6.2.32) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\int_0^L X_n''(x)X_m''(x) dx = \beta_m^4 \int_0^L X_n(x)X_m(x) dx. \quad (6.2.33)$$

Με τη χρήση μάλιστα της τόσο στοιχειώδους και προφανούς αντιμεταθετικής ιδιότητας στον απλό πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, εδώ στα γινόμενα των ολοκληρωτέων συναρτήσεων:

$$X_n''(x)X_m''(x) = X_m''(x)X_n''(x) \quad \text{και επίσης} \quad X_n(x)X_m(x) = X_m(x)X_n(x) \quad (6.2.34)$$

έχουμε τελικά

$$\int_0^L X_m''(x)X_n''(x) dx = \beta_m^4 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.2.35)$$

Οδηγηθήκαμε έτσι σε ένα παράξενο συμπέρασμα: πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο σχέσεις (6.2.32) και (6.2.35). Είναι σχεδόν ολοίδιες. Η μόνη διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι η πρώτη έχει β_n^4 στο δεξιό μέλος της, ενώ η δεύτερη έχει β_m^4 στο ίδιο μέλος της. Αφαιρώντας τις κατά μέλη (τα αριστερά μέλη τους έτσι κι αλλιώς συμπίπτουν), οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$0 = (\beta_n^4 - \beta_m^4) \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.2.36)$$

Έχουμε όμως υποθέσει από την αρχή πως οι δύο ιδιοσυχνότητες καμπτικών ταλαντώσεων ω_m και ω_n είναι διαφορετικές μεταξύ τους: $\omega_m \neq \omega_n$. Η υπόθεση αυτή μας έχει οδηγήσει και στο συμπέρασμα ότι και οι δύο σταθερές β_m και β_n είναι και αυτές διαφορετικές μεταξύ τους: $\beta_m \neq \beta_n$. Τα έχουμε ήδη σημειώσει αυτά στις ανισότητες (6.2.24). Καιρός είναι να τα χρησιμοποιήσουμε στη σχέση μας (6.2.36), στην οποία με τόσο κόπο καταλήξαμε. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής: (α) δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις (ή ολοκληρώσεις κατά παράγοντες ή κατά μέρη) και επίσης (β) τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού μας (είτε πακτωμένο είτε απλά στηριζόμενο είτε ελεύθερο άκρο).

Πραγματικά με $\beta_m \neq \beta_n$ η τελευταία σχέση μας (6.2.36) καταλήγει άμεσα στην τελική της και τόσο σημαντική στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.37)$$

Αυτή είναι η σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) των ιδιομορφών $X_m(x)$ (με $m = 1, 2, \dots$), την οποία αποδείξαμε. Πρόκειται για μια σχέση θεμελιώδους σημασίας. Θα έχουμε την ευκαιρία να τη χρησιμοποιήσουμε εκτενώς παρακάτω κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Αυτό θα το κάνουμε μάλιστα είτε (α) σε ελεύθερες ταλαντώσεις: χωρίς καθόλου κατανεμημένη κάθετη εξωτερική φόρτιση $p(x, t)$, δηλαδή με $p(x, t) \equiv 0$, ομογενής εξίσωση (6.2.2), είτε (β) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις: εκεί με κατανεμημένη κάθετη εξωτερική φόρτιση $p(x, t)$, δηλαδή με $p(x, t) \neq 0$, μη ομογενής εξίσωση (6.2.1).

Στο σημείο αυτό είναι βέβαια σκόπιμο να ξαναθυμηθούμε τον ορισμό

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad (6.2.38)$$

της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) δύο διαφορετικών συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Στη θεμελιώδους σημασίας αυτή έννοια της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) συναρτήσεων είχαμε την ευκαιρία να αναφερθούμε στην Ενότητα Α16.1 του Κεφαλαίου Α16 στο βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ. Εκεί, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο Α16.1.2, κάναμε επίσης ρητή αναφορά και σε πέντε συστήματα (σύνολα) ορθογωνίων πολυωνύμων: (α) Legendre $P_n(x)$, (β και γ) Chebyshev πρώτου είδους $T_n(x)$ και δευτέρου είδους $U_n(x)$, (δ) Laguerre $L_n(x)$ και (ε) Hermite $H_n(x)$. Παραπέρα στο ίδιο Κεφάλαιο Α16 χρησιμοποιήσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας στις τόσο πια γνωστές μας σειρές Fourier με πάρα πολλές παραπέρα εφαρμογές. Στο παρόν βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ είδαμε τέτοιες εφαρμογές στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, αλλά και στην προηγούμενη Ενότητα Β6.1 του παρόντος Κεφαλαίου Β6 στις αξονικές (ή διαμήκειες) ταλαντώσεις ράβδου.

Εδώ με βάση τον ορισμό της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.38) απλά διαπιστώνουμε ότι οι ορθογώνιες συναρτήσεις δεν περιορίζονται σε λίγο-πολύ μαθηματικές συναρτήσεις, αλλά επεκτείνονται και σε συναρτήσεις με καθαρά φυσική προέλευση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοιες συναρτήσεις είναι εδώ οι ιδιομορφές (καλύτερα οι ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων) $X_n(x)$ με $n = 1, 2, \dots$. Και αυτές αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων (ή ορθογωνικών) συναρτήσεων. Το ίδιο ακριβώς έχουμε δει πως συμβαίνει (α) με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο στις τριγωνομετρικές σειρές Fourier, (β) με τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση στις μιγαδικές ή εκθετικές σειρές Fourier και (γ) με τα πέντε συστήματα ορθογωνίων πολυωνύμων που αναφέραμε λίγο προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε επίσης μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Με τη βασική σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.37) να ισχύει το σχετικό ολοκλήρωμα για δύο διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$ θα είναι ίσο με το μηδέν. Τότε όμως, όπως άμεσα παρατηρούμε από τη σχέση (6.2.32) ή (6.2.35) (το ίδιο κάνει!), και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα των δευτέρων παραγώγων τους $X_m''(x)$ και $X_n''(x)$ αντίστοιχα θα είναι και αυτό ίσο με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_0^L X_m''(x)X_n''(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά και πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.39)$$

Επομένως όχι μόνο οι ιδιομορφές $X_n(x)$, αλλά και οι δεύτερες παράγωγοί τους $X_n''(x)$ αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων σε καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού. Και μάλιστα για οποιουδήποτε συνδυασμούς συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα της. Ένα τέτοιο άκρο μπορεί να είναι είτε (α) πακτωμένο είτε (β) απλά στηριζόμενο (άρθρωση ή κύλιση) είτε (γ) ελεύθερο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Οι δύο συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) και (6.2.39) ισχύουν σε κάθε περίπτωση: (α) αμφίπακτη δοκό, (β) αμφιέριστη δοκό, (γ) δοκό με πακτωμένο το ένα άκρο της και ελεύθερο το άλλο και (δ) πρόβολο. Αυτά είναι τα στατικά αποδεκτά είδη συνήθων δοκών, όπου δεν έχουμε ενδιάμεσες στηρίξεις της δοκού.

Υπάρχουν όμως και στατικά απαράδεκτες συνθήκες δοκοί. Αυτές είναι (ε) η δοκός με το ένα άκρο της αρθρωμένο και το άλλο ελεύθερο και (στ) η δοκός και με τα δύο άκρα της ελεύθερα. Προφανώς τέτοιες δοκοί δεν παρουσιάζονται στις συνθήκες κατασκευές, αλλά γενικά μιλώντας είναι αποδεκτές σε δυναμικά φαινόμενα που διέπονται από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2) (χωρίς εξωτερική φόρτιση: $p(x, t) \equiv 0$) και γενικότερα (6.2.1) (με εξωτερική φόρτιση: $p(x, t) \neq 0$) των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Και σ' αυτές τις δοκούς ισχύουν ακριβώς οι ίδιες συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) για τις ιδιομορφές τους $X_n(x)$ και (6.2.39) για τις δεύτερες παραγώγους $X_n''(x)$ των ιδιομορφών τους $X_n(x)$. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω μόνο τις συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) για τις ίδιες τις ιδιομορφές $X_n(x)$.

Παρενθετικά ας σημειώσουμε επίσης ότι παίρνοντας υπόψη μας τις σχέσεις (6.2.25) και (6.2.37), διαπιστώνουμε επιπλέον ότι

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά ξανά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.40)$$

Δηλαδή και οι συναρτήσεις $X_m(x)$ και $X_n''''(x)$ με $m \neq n$ είναι και αυτές ορθογώνιες κατά μήκος της συνήθους δοκού μας. Δεν υπάρχει όμως σχετικό σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων, επειδή έχουμε την ιδιομορφή $X_m(x)$ και την τέταρτη παράγωγο $X_n''''(x)$ της ιδιομορφής $X_n(x)$. Έτσι κι αλλιώς δεν είναι πρακτικά σημαντικές οι σχέσεις ορθογωνιότητας (6.2.40). Κλείνει η παρένθεση αυτή.

Ακολουθούν τρεις πολύ σημαντικές παρατηρήσεις για τον Πολιτικό Μηχανικό στην Επιστήμη του, εδώ φυσικά στην περιοχή της Δυναμικής των Κατασκευών:

► **Παρατήρηση Β6.5:** Οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ γενικεύονται και στην περίπτωση που η δυσκαμψία EI ή/και η γραμμική πυκνότητα ρA της δοκού δεν είναι σταθερές (η μία ή η άλλη ή/και οι δύο μαζί) κατά μήκος της. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβαίνει, π.χ., σε δοκό ορθογωνικής διατομής με μεταβλητό ύψος $h = h(x)$ της ορθογωνικής διατομής της κατά μήκος της δοκού, όπως σε δοκό που στηρίζει εγκάρσια έναν εξώστη (μπαλκόνι). Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι εύλογο να έχουμε μεγαλύτερο ύψος μιας δοκού στηρίξεως του εξώστη προς το μέρος του κτιρίου (προς τα μέσα) παρά προς το μέρος του δρόμου ή του ακάλυπτου χώρου (προς τα έξω). Φυσικά μια τέτοια δοκός δεν είναι συνήθης δοκός με την έννοια που εμείς έχουμε αποδώσει στον όρο αυτό. Η σχετική απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_n(x)$ αποτελεί απλά γενίκευση της προηγούμενης αποδείξεως (με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία) τώρα όμως με μεταβλητή τη δυσκαμψία EI : $EI = EI(x)$ ή/και τη γραμμική πυκνότητα ρA : $\rho A = \rho A(x)$ της δοκού. Αποδεικνύεται έτσι ότι η βασική σχετική συνθήκη ορθογωνιότητας (6.2.37) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\int_0^L \rho A(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.41)$$

Στη συνθήκη αυτή η μεταβλητή γραμμική πυκνότητα $\rho A(x)$ της δοκού κατά μήκος της αποτελεί ουσιαστικά τη **συνάρτηση βάρους** $w(x) = \rho A(x)$. Αν και εδώ θα περιορισθούμε σε συνήθεις δοκούς με τη γραμμική πυκνότητα ρA σταθερή, είναι εντούτοις σκόπιμο να γνωρίζουμε την ενδιαφέρουσα αυτή γενίκευση. Ανάλογα μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.39) για τις δεύτερες παραγώγους $X_n''(x)$ των ιδιομορφών $X_n(x)$ παίρνουν τώρα τις γενικευμένες μορφές τους

$$\int_0^L EI(x) X_m''(x) X_n''(x) dx = 0 \quad \text{ξανά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.42)$$

Σημειώνουμε ότι εδώ έχουμε σαν συνάρτηση βάρους $w(x)$ τη συνάρτηση $EI(x)$, δηλαδή τη μεταβλητή δυσκαμψία της δοκού (μη συνήθους δοκού με την ορολογία που υιοθετήσαμε) κατά μήκος της.

Παρενθετικά ας σημειωθεί και πάλι ότι ο μαθηματικά σωστός συμβολισμός για τη γραμμική πυκνότητα της δοκού είναι $\rho(x)A(x)$ ή $\mu(x)$ (με $\mu(x) := \rho(x)A(x)$) και όχι $\rho A(x)$. Εντούτοις συνήθως και ο συμβολισμός αυτός $\rho A(x)$ για τη γραμμική πυκνότητα δεν προκαλεί σύγχυση στον Πολιτικό Μηχανικό. Ανάλογα ισχύουν και για μεταβλητή δυσκαμψία (ή μέτρο δυσκαμψίας) $EI(x)$ με σωστό συμβολισμό τον $E(x)I(x)$ ή ισοδύναμα $D(x)$ με $D(x) := E(x)I(x)$ να δηλώνει τη δυσκαμψία της δοκού.

► **Παρατήρηση Β6.6:** Η πιο πάνω απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών στη σχέση (6.2.37), την επαναλαμβάνουμε και εδώ (είναι τόσο μα τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό!):

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.43)$$

Βασίσθηκε σε μαθηματική απόδειξη. Συγκεκριμένα βασίσθηκε: (α) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους

δοκού και στη σχετική χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12), (β) στην παραγοντική ολοκλήρωση στον Ολοκληρωτικό Λογισμό και (γ) στις κλασικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα δοκών. Εντούτοις είναι δυνατόν η ίδια απόδειξη να βασισθεί και στη Μηχανική, συγκεκριμένα στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell. Στην απόδειξη αυτή το έργο των αδρανειακών δυνάμεων του m τρόπου ιδιοταλαντώσεως της δοκού πάνω στην ελαστική γραμμή της του n τρόπου ιδιοταλαντώσεως της ίδιας δοκού είναι ίσο με το αντίστοιχο έργο με εναλλαγή των m και n στους τρόπους ταλαντώσεως της δοκού. Η εναλλακτική αυτή απόδειξη είναι πολύ ενδιαφέρουσα από φυσικής απόψεως, πραγματικά χρησιμοποιείται μερικές φορές σε συγγράμματα της Δυναμικής των Κατασκευών και είναι εξαιρετικά απλή ουσιαστικά με πολύ μικρή αναγκαιότητα υπολογισμών. Θα μπορούσε έτσι να έχει ευρύτερη υιοθέτηση, αλλ' η φυσική βάση της δεν είναι τόσο σαφής στο παρόν δυναμικό πρόβλημα ταλαντώσεων, ιδιαίτερα σε μάθημα μόλις του τρίτου εξαμήνου σπουδών. Έτσι στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III προτιμήθηκε η μαθηματική απόδειξη, ακριβώς όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συγγράμματα Δυναμικής των Κατασκευών.

► **Παρατήρηση Β6.7:** Όλες αυτές οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας ισχύουν για $m \neq n$: για δύο διαφορετικές ιδιομορφές $X_m(x)$ και $X_n(x)$. Για $m = n$ ασφαλώς και δεν περιμένουμε να ισχύει η ορθογωνιότητα της ιδιομορφής $X_n(x)$ με τον εαυτό της. Κάτι τέτοιο θα ήταν σοβαρό σφάλμα μας και θα οδηγούσε σε τραγικά υπολογιστικά λάθη. Στην ειδική αυτή περίπτωση απλά θα έχουμε

$$N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.44)$$

Οι προφανώς θετικές ποσότητες N_n που ορίστηκαν στην προηγούμενη σχέση (6.2.44) καλούνται **νόρμες των ιδιομορφών ταλαντώσεων**. Όμως η λέξη νόρμα, που έχει γενικά μαθηματική και όχι φυσική σημασία, δεν είναι και πολύ αρεστή στον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος είναι εξοικειωμένος με πιο φυσικές έννοιες. Για το λόγο αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί γενικά αντί για τις νόρμες N_n των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ τις ποσότητες $M_n := \rho A N_n$, δηλαδή τις ποσότητες

$$M_n = \rho A \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{πάλι με} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.45)$$

ακόμη και όταν μελετάει συνήθεις δοκούς. Με ρA τη γραμμική πυκνότητα της συνήθους δοκού, τις ιδιομορφές $X_n(x)$ αδιάστατες συναρτήσεις και ολοκλήρωση κατά μήκος της δοκού ($0 \leq x \leq L$) είναι προφανές ότι η φυσική διάσταση των νέων αυτών ποσοτήτων M_n είναι απλά γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους της δοκού) επί μήκος και κατά συνέπεια τελικά μάζα. Οι ποσότητες αυτές M_n καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **γενικευμένες μάζες**. Η πρακτική χρησιμότητά τους θα φανεί παρακάτω στην παρούσα ενότητα (προς το τέλος της), μια ενότητα που είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένη στις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθων δοκών. Φυσικά, όταν η δοκός έχει μεταβλητή γραμμική πυκνότητα $\rho A(x)$ κατά μήκος της, η χρήση των γενικευμένων μαζών M_n (αντί για τις νόρμες N_n) είναι απόλυτα αναγκαία και μάλιστα με το $\rho A(x)$ μέσα στο ολοκλήρωμα (6.2.45).

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή για την ορθογωνιότητα των ιδιομορφών καμπτικών ταλαντώσεων δοκού, ας σημειώσουμε ότι στην ειδική (και εξαιρετικά απλή) περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού οι ιδιομορφές ταλαντώσεων $X_n(x)$ δίνονται από τις απλές ημιτονικές σχέσεις (6.2.16): $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$. Το τόσο απλό αυτό αποτέλεσμα το ξέρουμε καλά ήδη από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II: Παράγραφος Α9.2.3, σχέσεις (9.2.34), όπου είχαμε λύσει το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών. Στην ειδική αυτή περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού η ισχύς των παραπάνω ιδιοτήτων ορθογωνιότητας των ιδιομορφών, κυρίως της βασικής ιδιότητας (6.2.43), είναι προφανής. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι συναρτήσεις $\sin(n\pi x/L)$ ($n = 1, 2, \dots$) αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων. Τούτο το γνωρίζουμε ήδη πολύ καλά και είχαμε την ευκαιρία να το αποδείξουμε στην Παράγραφο Β6.1.9 για τις αξονικές ταλαντώσεις αμφίπακτης ράβδου.

Στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.5 θα εξετάσουμε τη δυσκολότερη περίπτωση ιδιομορφών $X_n(x)$ που παρουσιάζονται σε μια συνήθη δοκό με πάκτωση στο αριστερό άκρο της και κύλιση στο δεξιό.

B6.2.5. Προσδιορισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως δοκού**B6.2.5.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών**

Έχουμε ήδη μελετήσει στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II στην Ενότητα Α9.2 τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ αμφιέριστης δοκού μήκους L ($0 \leq x \leq L$), που δίνονται από τις απλές σχέσεις

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.46)$$

Τη μελέτη των ιδιομορφών αυτών $X_n(x)$ την κάναμε στα πλαίσια ενός προβλήματος συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις χωρίς καμία απολύτως αναφορά στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2). Χρησιμοποιήσαμε όμως, όπως και έπρεπε, τη σχετική χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12) και μάλιστα έτοιμη, γνωστή. Φυσικά χρησιμοποιήσαμε επίσης και το δεύτερο ζεύγος συνοριακών συνθηκών (6.2.19) (που αφορά σε απλά στηριζόμενο άκρο δοκού) και για τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της αμφιέριστης δοκού. Είναι προφανές ότι οι ιδιομορφές (6.2.46) είναι πολύ απλές και αυτό είναι ιδιαίτερα ευνοϊκό για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού είτε (α) ελεύθερων: εξίσωση (6.2.2), είτε (β) εξαναγκασμένων: εξίσωση (6.2.1). Στην επίλυση αυτή (γενικά για κάθε συνήθη δοκό, όχι μόνο για την αμφιέριστη δοκό) θα προχωρήσουμε στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.6, που θα είναι και η τελευταία αυτής της Ενότητας Β6.2.

Σε τούτη την Παράγραφο Β6.2.5 θα αναφερθούμε σε μια πιο δύσκολη περίπτωση συνοριακών συνθηκών στη συνήθη δοκό μήκους L ($0 \leq x \leq L$) που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στη δοκό με πακτωμένο το αριστερό άκρο της $x = 0$ και με κύλιση το δεξιό $x = L$. (Μερικές φορές μια τέτοια δοκός καλείται μονόπακτη δοκός, επειδή έχει μία μόνο πάκτωση, σε αντίθεση με τον καθιερωμένο όρο αμφίπακτη δοκός. Εδώ δε θα υιοθετήσουμε τον όρο μονόπακτη δοκός.) Ο προσδιορισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ αυτής της δοκού θα βασίζεται και πάλι στην ίδια γενική λύση (6.2.15) της γνωστής μας χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.12). Την αναφέρουμε και εδώ

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}. \quad (6.2.47)$$

Επαναλαμβάνουμε επίσης και τη γενική λύση (6.2.15) που προαναφέραμε:

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.48)$$

Η διαφορά εδώ από την αμφιέριστη δοκό είναι απλά οι διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο $x = 0$ της παρούσας συνήθους δοκού μας με πάκτωση-κύλιση: πάκτωση στο αριστερό άκρο και κύλιση στο δεξιό. Συγκεκριμένα στη δοκό μας αυτή διαπιστώνουμε εύκολα από το πρώτο και το δεύτερο ζεύγος συνοριακών συνθηκών (6.2.19) (πακτωμένο άκρο και απλά στηριζόμενο άκρο αντίστοιχα) ότι θα έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$X(0) = 0 \quad \text{και} \quad X'(0) = 0 \quad \text{στο αριστερό άκρο της δοκού} \quad x = 0 \quad (\text{με την πάκτωση}), \quad (6.2.49)$$

$$X(L) = 0 \quad \text{και} \quad X''(L) = 0 \quad \text{στο δεξιό άκρο της δοκού} \quad x = L \quad (\text{με την κύλιση}). \quad (6.2.50)$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά από την αμφιέριστη δοκό είναι ότι εδώ στο αριστερό άκρο $x = 0$ ισχύει η συνθήκη $X'(0) = 0$ αντί για τη συνθήκη $X''(0) = 0$, που ίσχυε στην αμφιέριστη δοκό (μηδενική κλίση αντί για μηδενική καμπτική ροπή). Οι άλλες τρεις συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες.

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να προσδιορίσουμε τις τέσσερις σταθερές A , B , C και D στη λύση (6.2.48) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.47), έτσι ώστε να πληρούνται ταυτόχρονα και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50). Είναι πραγματοποιήσιμο αυτό. Εντούτοις, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, οι ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων $X_n(x)$, οι οποίες

θα προκύψουν για την παρούσα δοκό με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα, είναι πολύ πολυπλοκότερες από τις απλές ημιτονικές ιδιομορφές ταλαντώσεων (6.2.46): $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$. Αυτές ισχύουν στην αμφιέριστη δοκό. Καμία άλλη δοκός δεν παρουσιάζει τόσο απλές ιδιομορφές: ούτε η παρούσα δοκός με άρθρωση-κύλιση στα άκρα της ούτε η αμφίπακτη δοκός ούτε ο πρόβολος ούτε η απόλυτα ελεύθερη δοκός. Στ' αλήθεια καμία άλλη δοκός!

Σαν πρώτη δυνατότητα στον πιο πάνω στόχο μας έχουμε εκείνη που θα οδηγήσει τελικά στο μηδενισμό μιας οριζουσας δευτέρας τάξεως $D_2 = 0$, όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο εδάφιο.

Β6.2.5.2. Χρήση οριζουσας δευτέρας τάξεως

Ξεκινάμε λοιπόν το έργο μας και μάλιστα από το αριστερό άκρο $x = 0$ της παρούσας δοκού με συνοριακές συνθήκες τις (6.2.49). Εφαρμόζοντας πρώτα την πρώτη συνοριακή συνθήκη $X(0) = 0$ (μηδενικό βέλος κάμψεως στο άκρο αυτό $x = 0$), διαπιστώνουμε από τη γενική λύση (6.2.48) ότι θα πρέπει να έχουμε

$$X(0) = A + C = 0, \quad \text{οπότε} \quad C = -A, \quad (6.2.51)$$

αφού ξέρουμε πολύ καλά πως

$$\cosh 0 = \cos 0 = 1 \quad \text{και επίσης} \quad \sinh 0 = \sin 0 = 0. \quad (6.2.52)$$

Προσδιορίστηκε επομένως η μία σταθερά της γενικής λύσεώς μας (6.2.48): η σταθερά C . Ας την αντικαταστήσουμε λοιπόν στη λύση (6.2.48), η οποία παίρνει τώρα (με $C = -A$) τη μορφή

$$X(x) = A(\cosh \beta x - \cos \beta x) + B \sinh \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.53)$$

Συνεχίζουμε με τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη $X'(0) = 0$ (μηδενική κλίση ή στροφή στο ίδιο πακτωμένο άκρο $x = 0$), που είναι προφανής και αυτή λόγω της πακτώσεως της δοκού μας στο άκρο αυτό $x = 0$. Παραγωγίζουμε μία φορά τη σχέση (6.2.53) και βρίσκουμε αμέσως ότι

$$X'(x) = A\beta(\sinh \beta x + \sin \beta x) + B\beta \cosh \beta x + D\beta \cos \beta x. \quad (6.2.54)$$

Θέτουμε τώρα στην παράγωγο αυτή $x = 0$ και εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη $X'(0) = 0$, που προαναφέραμε. Διαπιστώνουμε έτσι με τη χρήση και των τόσο γνωστών μας τιμών (6.2.52) ότι

$$X'(0) = B\beta + D\beta = (B + D)\beta = 0, \quad \text{οπότε} \quad D = -B, \quad (6.2.55)$$

αφού σε ταλαντώσεις $\omega > 0$ άρα και $\beta > 0$ με βάση τη δεύτερη σχέση (6.2.47), που ορίζει το β .

Προσδιορίστηκε συνεπώς και μια δεύτερη σταθερά της γενικής λύσεως (6.2.48): η σταθερά D . Αντικαθιστούμε την τιμή της $D = -B$ στη λύση (6.2.53), η οποία γράφεται τώρα στη μορφή

$$X(x) = A(\cosh \beta x - \cos \beta x) + B(\sinh \beta x - \sin \beta x). \quad (6.2.56)$$

Έχουν απομείνει δύο μόνο σταθερές στη λύση αυτή $X(x)$: οι σταθερές A και B . (Επομένως δεν είναι πια γενική λύση!) Ας υπολογίσουμε και τις δύο πρώτες παραγώγους της $X'(x)$ και $X''(x)$, που έτσι κι αλλιώς θα τις χρειασθούμε αμέσως παρακάτω δουλεύοντας στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού: στο άκρο με την κύλιση. Πολύ εύκολα προκύπτουν οι δύο αυτές παράγωγοι

$$X'(x) = A\beta(\sinh \beta x + \sin \beta x) + B\beta(\cosh \beta x - \cos \beta x), \quad (6.2.57)$$

$$X''(x) = A\beta^2(\cosh \beta x + \cos \beta x) + B\beta^2(\sinh \beta x + \sin \beta x). \quad (6.2.58)$$

Στο σημείο αυτό ας πάρουμε μια βαθιά ανάσα επαληθεύοντας εύκολα την πλήρωση και των δύο συνοριακών συνθηκών $X(0) = 0$ και $X'(0) = 0$ από τις σχέσεις (6.2.56) και (6.2.57) αντίστοιχα. Επομένως σωστά προχωράμε μέχρι στιγμής τουλάχιστον!

Ας συνεχίσουμε τώρα με το δεξιό άκρο $x = L$ της παρούσας δοκού με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα. Ξαναθυμίζουμε τις σχετικές συνοριακές συνθήκες (6.2.50): μηδενικό βέλος κάμψεως: $X(L) = 0$, και επίσης μηδενική καμπτική ροπή: $X''(L) = 0$. Ξεκινάμε με την πρώτη: $X(L) = 0$. Η λύση μας $X(x)$ στη σχέση (6.2.56) μας δίνει απλά θέτοντας σ' αυτήν $x = L$

$$X(L) = A(\cosh \beta L - \cos \beta L) + B(\sinh \beta L - \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.59)$$

Προχωράμε τώρα και στην τελευταία συνθήκη $X''(L) = 0$ στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού μας με πάκτωση-κύλιση. Η δεύτερη παράγωγος $X''(x)$ στη σχέση (6.2.58) της μέχρι τώρα λύσεως $X(x)$ μας δίνει για $x = L$

$$X''(L) = A\beta^2(\cosh \beta L + \cos \beta L) + B\beta^2(\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.60)$$

Έχουμε λοιπόν καταγράψει τις δύο συνοριακές συνθήκες (6.2.59) (για μηδενικό βέλος κάμψεως) και (6.2.60) (για μηδενική καμπτική ροπή) στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού. Επομένως για τους συντελεστές A και B που έχουν απομείνει στη μέχρι τώρα λύση μας (6.2.56), που φιλοδοξούμε με εύλογο επιπλέον κόπο να τη μετατρέψουμε στις ζητούμενες ιδιομορφές $X_n(x)$, έχουμε ένα σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι διαφορικών!) εξισώσεων με δύο αγνώστους: τις δύο σταθερές A και B . Τούτο είναι το σύστημα των εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60). Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στο σύστημα αυτό. Δεν είναι δα και κανένα τόσο φοβερό σύστημα! Προχωράμε λοιπόν!

Το πρόβλημά μας είναι ότι το σύστημα αυτών των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) είναι ομογενές, κάτι που φαίνεται αμέσως από τα μηδενικά δεξιά μέλη του. Επομένως γενικά μιλώντας, η λύση που καταρχήν έχει είναι η τετριμμένη λύση, η μηδενική λύση $A = B = 0$. Και πράγματι γενικά αυτή είναι η λύση του συστήματος που προαναφέραμε. Παραπέρα η λύση αυτή οδηγεί βέβαια από τη σχέση (6.2.56) και στην αντίστοιχη τετριμμένη (μηδενική) λύση

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{για} \quad A = B = 0 \quad (6.2.61)$$

για τη χωρική συνάρτηση $X(x)$ στο χωρισμό των δύο μεταβλητών (6.2.3): $v(x, t) = X(x)T(t)$. Τότε θα ισχύει και $v(x, t) \equiv 0$ για κάθε x και t , δηλαδή για κάθε σημείο x της δοκού μας και σε κάθε χρονική στιγμή t . Θαυμάσια λοιπόν ως εδώ: προέκυψε μηδενική χωρική λύση $X(x) \equiv 0$ επομένως και απόλυτα (εκ ταυτότητος) μηδενικό βέλος κάμψεως $v(x, t) \equiv 0$ στη δοκό με πάκτωση-κύλιση που εξετάζουμε. Άρα δεν παρουσιάζονται καθόλου καμπτικές ιδιοταλαντώσεις, κάτι που βέβαια καθιστά ευτυχισμένο τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος δε θέλει ένα δυναμικό φαινόμενο (π.χ. ένας σεισμός) να συντονίζεται με πιθανές ιδιοταλαντώσεις στη δοκό του. Με άλλα λόγια οι ιδιοταλαντώσεις μιας δοκού σε μια κατασκευή αποτελούν εύλογα ένα ανεπιθύμητο και απευκταίο φαινόμενο για τον Πολιτικό Μηχανικό. Θα ήταν πραγματικά χαρά του να έχει πάντα μα πάντα τη μηδενική, την τετριμμένη λύση $X(x) \equiv 0$, άρα και $v(x, t) = X(x)T(t) \equiv 0$ στις ιδιοταλαντώσεις. Μια χαρά!

Θα ήταν τέλεια να ήταν έτσι, αλλά δυστυχώς τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι. Συγκεκριμένα, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, όπως είναι εδώ το σύστημα των εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60), έχει σίγουρα την τετριμμένη λύση, τη μηδενική λύση $A = B = 0$. Μπορεί όμως σε ειδικές περιπτώσεις να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Και ποιες ακριβώς είναι οι ειδικές αυτές περιπτώσεις; Και αυτό το ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα. Είναι οι περιπτώσεις που η ορίζουσα D_2 των συντελεστών των αγνώστων του (εδώ των δύο σταθερών A και B που επιδιώκουμε με πείσμα να υπολογίσουμε) είναι μηδέν.

Δηλαδή το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) έχει μηδενική λύση στην ειδική περίπτωση που ισχύει

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L - \sin \beta L \\ \beta^2(\cosh \beta L + \cos \beta L) & \beta^2(\sinh \beta L + \sin \beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.2.62)$$

για την ορίζουσα D_2 των συντελεστών των αγνώστων του A και B . Απλοποιώντας μάλιστα τη σταθερά β , η οποία είναι θετική για $\omega > 0$ (δηλαδή κάθε φορά που έχουμε ταλάντωση της δοκού), ξαναγράφουμε τη συνθήκη μηδενισμού της ορίζουσας αυτής D_2 και στη λίγο απλούστερη μορφή

$$\begin{vmatrix} \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L - \sin \beta L \\ \cosh \beta L + \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.63)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την ορίζουσα στο αριστερό μέλος της συνθήκης αυτής με βάση το γνωστό μας τύπο υπολογισμού ορίζουσας δευτέρας τάξεως (2×2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (6.2.64)$$

Έτσι βρίσκουμε τη συνθήκη

$$(\cosh \beta L - \cos \beta L)(\sinh \beta L + \sin \beta L) - (\sinh \beta L - \sin \beta L)(\cosh \beta L + \cos \beta L) = 0. \quad (6.2.65)$$

Εκτελώντας μάλιστα τις σχετικές πράξεις και απλοποιώντας το αποτέλεσμα (χωρίς να χρειάζεται μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε καμία ιδιότητα των υπερβολικών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων), καταλήγουμε στο αρκετά απλό αποτέλεσμα

$$\cosh \beta L \sin \beta L = \cos \beta L \sinh \beta L. \quad (6.2.66)$$

Η συνθήκη αυτή για το μηδενισμό της ορίζουσας δευτέρας τάξεως D_2 ($D_2 = 0$) στη σχέση (6.2.62) μπορεί να γραφεί (με διαίρεση με το γινόμενο $\cosh \beta L \cos \beta L$) και στην τελική της μορφή

$$\tan \beta L = \tanh \beta L \quad \text{και απόλυτα ισοδύναμα} \quad \tanh \beta L = \tan \beta L. \quad (6.2.67)$$

Η συνθήκη αυτή ισχύει, επειδή γνωρίζουμε πάρα πολύ καλά πως $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ και ανάλογα πως $\tan z = \sin z / \cos z$.

Τί δηλώνει η σημαντική αυτή συνθήκη $\tanh \beta L = \tan \beta L$; Απλά δηλώνει πως αν τύχει και ισχύει (για κατάλληλες φυσικά τιμές της βοηθητικής σταθεράς β), τότε και μόνο τότε μηδενίζεται η ορίζουσα D_2 (στη σχέση (6.2.62)) των δύο συντελεστών A και D του πιο πάνω συστήματος των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60). Στην πολύ ειδική αυτή περίπτωση το συγκεκριμένο σύστημα έχει όχι μόνο την τετριμμένη (τη μηδενική) λύση $A = B = 0$, αλλ' έχει επίσης και μη μηδενικές λύσεις (συγκεκριμένα μια απειρία μάλιστα τέτοιων λύσεων). Αυτά τα έχουμε μάθει στη Γραμμική Άλγεβρα. Και τί σημαίνει μη μηδενικές λύσεις; Φυσικά σημαίνει ότι υπάρχουν μη μηδενικές (εννοείται μη μηδενικές ταυτόχρονα) σταθερές A και B (που αντιστοιχούν σε μια τιμή β_n της σταθεράς β στην τελική εξίσωση ή συνθήκη (6.2.67)), έστω οι σταθερές A_n και B_n , οι οποίες επαληθεύουν και τις δύο γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (6.2.59) και (6.2.60).

B6.2.5.3. Χρήση του λόγου των αγνώστων συντελεστών

Σε λίγο θα προχωρήσουμε στην καταγραφή των τιμών αυτών β_n που επαληθεύουν την τελική συνθήκη (6.2.67), που είναι προφανώς μια υπερβατική εξίσωση και όχι αλγεβρική εξίσωση, γιατί περιέχει μία υπερβολική και μία τριγωνομετρική συνάρτηση. Προηγουμένως όμως θα θέλαμε να βρούμε την ίδια ακριβώς συνθήκη και με έναν κάπως απλούστερο τρόπο που δε θα χρησιμοποιεί καθόλου ορίζουσες: θα τις αποφεύγει. Ας ξαναγράφουμε όμως πρώτα τις δύο παραπάνω ομογενείς γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (6.2.59) και (6.2.60) τώρα διαιρώντας μάλιστα τη δεύτερη από αυτές με β^2 (επαναλαμβάνουμε $\beta > 0$ σε ταλαντώσεις, γιατί εκεί $\omega > 0$, άρα και $\beta > 0$):

$$A(\cosh \beta L - \cos \beta L) + B(\sinh \beta L - \sin \beta L) = 0, \quad (6.2.68)$$

$$A(\cosh \beta L + \cos \beta L) + B(\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.69)$$

Εδώ που αναζητούμε μη μηδενικές λύσεις στο ομογενές αυτό σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων υποθέτουμε ότι $A \neq 0$ και υπολογίζουμε το λόγο B/A τόσο από την πρώτη όσο και από τη δεύτερη εξίσωση. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L - \cos \beta L}{\sinh \beta L - \sin \beta L} \quad \text{από την πρώτη εξίσωση (6.2.68),} \quad (6.2.70)$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} \quad \text{από τη δεύτερη εξίσωση (6.2.69).} \quad (6.2.71)$$

Είναι όμως απόλυτα σαφές ότι ο λόγος αυτός B/A πρέπει να είναι ο ίδιος (όχι διαφορετικός!) και στις δύο αυτές σχέσεις, μια που επιχειρούμε να λύσουμε το σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.68) και (6.2.69) ως προς A και B . Εξισώνοντας λοιπόν τα δεξιά μέλη των δύο αυτών σχέσεων (6.2.70) και (6.2.71), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L - \cos \beta L}{\sinh \beta L - \sin \beta L} = -\frac{\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L}. \quad (6.2.72)$$

Πρέπει επομένως οπωσδήποτε τα δύο τελευταία κλάσματα να είναι ίσα μεταξύ τους. Απαλείφοντας τους παρονομαστές τους $\sinh \beta L - \sin \beta L$ και $\sinh \beta L + \sin \beta L$, καταλήγουμε εύκολα στη σχέση

$$(\cosh \beta L - \cos \beta L)(\sinh \beta L + \sin \beta L) = (\sinh \beta L - \sin \beta L)(\cosh \beta L + \cos \beta L). \quad (6.2.73)$$

Όμως η σχέση αυτή ουσιαστικά συμπίπτει με τη σχέση (6.2.65) και επομένως τελικά καταλήγει στην ίδια ακριβώς υπερβατική χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.67), ας την επαναλάβουμε και εδώ:

$$\tanh \beta L = \tan \beta L. \quad (6.2.74)$$

B6.2.5.4. Χρήση οριζουσας τετάρτης τάξεως

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε πως ο πιο επίσημος τρόπος ευρέσεως της ίδιας χαρακτηριστικής εξισώσεως $\tanh \beta L = \tan \beta L$ είναι με τη χρήση οριζουσας τετάρτης τάξεως. Τούτο σκόπιμα το αποφύγαμε πιο πάνω έχοντας χρησιμοποιήσει είτε οριζουσα δευτέρας τάξεως στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.63) είτε καθόλου οριζουσα στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.72).

Θεωρούμε τώρα, χωρίς να καταφύγουμε πια σε κανένα τέχνασμα για τη μείωση του αριθμού των τελικών εξισώσεων και των υπολογισμών μας, τη γενική λύση (6.2.48) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.47). Ξαναγράφουμε τη λύση αυτή $X(x)$ και πολύ εύκολα υπολογίζουμε και τις δύο πρώτες παραγώγους της $X'(x)$ και $X''(x)$, που θα τις χρειασθούμε στις τέσσερις συνοριακές μας συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50) στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού μας. Έτσι έχουμε

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x, \quad (6.2.75)$$

$$X'(x) = \beta(A \sinh \beta x + B \cosh \beta x - C \sin \beta x + D \cos \beta x), \quad (6.2.76)$$

$$X''(x) = \beta^2(A \cosh \beta x + B \sinh \beta x - C \cos \beta x - D \sin \beta x). \quad (6.2.77)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές εφαρμόζουμε τώρα τις συνοριακές συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50) στα δύο άκρα της δοκού μας: (α) $x = 0$: συνοριακές συνθήκες πακτώσεως $X(0) = 0$ και $X'(0) = 0$ και (β) $x = L$: συνοριακές συνθήκες απλής στηρίξεως (λόγω της κυλίσεως της δοκού στο άκρο αυτό $x = L$): $X(L) = 0$ και $X''(L) = 0$. Έτσι καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα των ακόλουθων τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$A + C = 0, \quad (6.2.78)$$

$$B + D = 0, \quad (6.2.79)$$

$$A \cosh \beta L + B \sinh \beta L + C \cos \beta L + D \sin \beta L = 0, \quad (6.2.80)$$

$$A \cosh \beta L + B \sinh \beta L - C \cos \beta L - D \sin \beta L = 0. \quad (6.2.81)$$

Μάλιστα στο σύστημα αυτό έχουμε απλοποιήσει από την αρχή τη μη μηδενική, συγκεκριμένα τη θετική (σε περίπτωση ταλαντώσεων) σταθερά β στη δεύτερη και στην τέταρτη εξίσωσή του.

Έχουμε επομένως καταλήξει σε ένα ομογενές σύστημα τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Αυτό προφανώς διαθέτει την τετριμμένη (τη μηδενική) λύση

$$A = B = C = D = 0. \quad (6.2.82)$$

Για το σύστημα αυτό διερωτώμαστε μήπως θα μπορούσε να διαθέτει και μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση. Όπως ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα και είχαμε ήδη την ευκαιρία να αναφέρουμε, αυτό συμβαίνει, εάν και μόνο εάν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων A, B, C και D είναι ίση με μηδέν. Συγκεκριμένα για το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (6.2.78) έως (6.2.81), εάν

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & \cos \beta L & \sin \beta L \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & -\cos \beta L & -\sin \beta L \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.83)$$

Φθάσαμε έτσι στη χαρακτηριστική μας εξίσωση με έναν απλό, σωστό, έντιμο τρόπο και χωρίς καθόλου υπολογιστικά τεχνάσματα αντίθετα με ό,τι είχαμε κάνει προηγουμένως ιδίως στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.72), όπου δε χρησιμοποιήθηκε καμία ορίζουσα D . Εδώ βέβαια το κόστος της απλής αυτής διαδικασίας είναι ότι πρέπει να υπολογίσουμε μια ορίζουσα τετάρτης τάξεως: την παραπάνω ορίζουσα D_4 . Αυτός ο υπολογισμός μπορεί να γίνει είτε με το χέρι είτε με τον υπολογιστή με τη χρήση ενός προγράμματος συμβολικών υπολογισμών. Προτιμήσαμε τη δεύτερη (χρονικά πιο σύντομη και υπολογιστικά πιο ασφαλή) αυτή δυνατότητα έχοντας κάνει χρήση της *Mathematica*. Έτσι πρακτικά σε μηδενικό χρόνο καταλήγουμε στη χαρακτηριστική εξίσωση

$$D_4 = 2(\cosh \beta L \sin \beta L - \cos \beta L \sinh \beta L) = 0. \quad (6.2.84)$$

Η εξίσωση αυτή αμέσως ανάγεται στην εξίσωση (6.2.66) και στη συνέχεια, πάλι με διαίρεση με το γινόμενο $\cosh \beta L \cos \beta L$, στην τελική της μορφή (6.2.67) ή (6.2.74). Τη γράφουμε κι εδώ (τρίτη φορά):

$$\tanh \beta L = \tan \beta L, \quad (6.2.85)$$

μια που τη βρήκαμε εδώ με έναν τρίτο τρόπο: με τη χρήση ορίζουσας τετάρτης τάξεως D_4 ($D_4 = 0$).

◆ **Συμπέρασμα:** Είναι προφανές ότι από πρακτικής απόψεως σε ένα πρόβλημα υπολογισμού της χαρακτηριστικής εξισώσεως σε συνήθη δοκό η μέθοδος αυτή (με την ορίζουσα τετάρτης τάξεως D_4) ίσως να φαίνεται πιο δύσκολη στον Πολιτικό Μηχανικό σε σύγκριση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους υπολογισμού της ίδιας χαρακτηριστικής εξισώσεως. Αυτό ισχύει βέβαια στην περίπτωση που όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με το χέρι και δεν ισχύει, όταν είναι διαθέσιμο και αποδεκτό (με εμπιστοσύνη στα αποτελέσματα!) ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica*. Επομένως, όταν η χαρακτηριστική εξίσωση, όπως στο παρόν πρόβλημα η εξίσωση (6.2.85), $\tanh \beta L = \tan \beta L$, πρέπει να προσδιοριστεί με το χέρι, προτιμώνται οι δύο πρώτοι τρόποι. Αντίθετα με τη χρήση του υπολογιστή προτιμάται ο τρίτος τρόπος: αυτός με την ορίζουσα τετάρτης τάξεως D_4 . Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τον μέτρια έμπειρο σε υπολογισμούς οριζουσών με το χέρι Πολιτικό Μηχανικό. Φυσικά και αυτός προτιμάει την ορίζουσα τετάρτης τάξεως D_4 (με χαρακτηριστική εξίσωση $D_4 = 0$ για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών β_n). Προφανώς τούτο συμβαίνει, επειδή πρόκειται για τον πιο συστηματικό και γενικεύσιμο σε δυσκολότερα τεχνικά προβλήματα (π.χ. σε πλαίσια ή και σε ολόκληρες κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού) τρόπο εργασίας για τον προσδιορισμό ιδιοτιμών και ιδιοσυχνοτήτων γενικότερα.

Ας προχωρήσουμε όμως τώρα ακόμη πιο πέρα στην τόσο ενδιαφέρουσα αυτή εργασία μας!

B6.2.5.5. Υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων

Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να διερευνήσουμε τις λύσεις β_n της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ή εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων), εδώ της υπερβατικής εξίσωσης (6.2.85): $\tanh \beta L = \tan \beta L$. Καταρχήν δεν ελπίζουμε σε κλειστούς τύπους για τις λύσεις αυτές β_n , επειδή έχουμε μια υπερβατική εξίσωση και μάλιστα όχι τόσο απλή, ώστε να διαθέτει τέτοιους κλειστούς τύπους. (Απλή ήταν για την αμφιέρειστη δοκό και στ' αλήθεια διέθετε κλειστούς τύπους για τις ιδιοτιμές $\beta_n = n\pi/L$ και τις ιδιομορφές $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$). Αυτά τα μελετήσαμε στην Ενότητα Α9.2.) Κατά συνέπεια η επίλυση της εξίσωσης $\tanh \beta L = \tan \beta L$ πρέπει να γίνει και πραγματικά θα γίνει αμέσως παρακάτω αριθμητικά. Εδώ μάλιστα χρησιμοποιήθηκε και πάλι η *Mathematica*. Το μόνο αναλυτικό αποτέλεσμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση αυτή είναι ότι για μεγάλες τιμές του z έχουμε

$$\tanh z \approx 1 \quad \text{και βέβαια} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tanh z = 1. \quad (6.2.86)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει το όριο αυτό με τον υπολογισμό του με βάση και το γνωστό τύπο $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ ορισμού της υπερβολικής εφαπτομένης $\tanh z$. Άρα ισχύει η προσέγγιση $\tanh z \approx 1$ για αρκετά μεγάλες τιμές του z . Συγκεκριμένα η *Mathematica* μας δίνει

$$\tanh 3 \approx 0.995055, \quad \tanh 4 \approx 0.999329, \quad \tanh 5 \approx 0.999909, \quad \tanh 6 \approx 0.999988 \quad (6.2.87)$$

με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων. Προφανώς οι τιμές αυτές ολοένα και πλησιάζουν στη μονάδα συμφωνώντας έτσι με το όριο (6.2.86): $\tanh z \rightarrow 1$ για $z \rightarrow \infty$.

Με τη χρήση της προσεγγίσεως αυτής για μεγάλες (μόνο για μεγάλες) τιμές του βL , ας πούμε για $\beta L \geq 5$ για ακρίβεια περίπου τεσσάρων σημαντικών ψηφίων, μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά τη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.85) στην απλούστατη μορφή της

$$\tan \beta L \approx 1, \quad \text{οπότε} \quad \beta_n L \approx n\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{(4n+1)\pi}{4} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.88)$$

Τούτο ισχύει αφού $\tan(\pi/4) = 1$ και επίσης $\tan(z + k\pi) = \tan z$, δηλαδή η συνάρτηση εφαπτομένης (\tan) είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Άρα ακόμη και για μέτρια μεγάλες τιμές του n , ας πούμε για $n \geq 3$, οι ιδιοτιμές β_n προσδιορίζονται από τη σχέση (6.2.88), δηλαδή τελικά από τη σχέση

$$\beta_n \approx \frac{(4n+1)\pi}{4L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.89)$$

Οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν σαν αρχικές προσεγγίσεις των ζητούμενων ιδιοτιμών β_n και να χρησιμοποιηθεί μαζί τους κι ένας κλασικός αλγόριθμος υπολογισμού ριζών εξισώσεων, όπως είναι η μέθοδος των Newton-Raphson. Στην εφαρμογή αυτή χρησιμοποιήσαμε κατευθείαν την εντολή FindRoot ευρέσεως ριζών της *Mathematica*. Ξεκινώντας από τις αρχικές προσεγγίσεις (6.2.89), που φαίνονται πρώτες πιο κάτω, οδηγηθήκαμε στις βελτιωμένες, τελικές προσεγγίσεις που φαίνονται αμέσως μετά. Παραθέτουμε στη συνέχεια τα σχετικά αποτελέσματα για $n = 1, 2, \dots, 8$ για τις αδιάστατες ποσότητες $z_n = \beta_n L$: τις ιδιοτιμές πολλαπλασιασμένες επί L :

$$\beta_1 L \approx 3.926990816987241548078 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_1 L \approx 3.926602312047918778239, \quad (6.2.90)$$

$$\beta_2 L \approx 7.068583470577034786541 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_2 L \approx 7.068582745628732088553, \quad (6.2.91)$$

$$\beta_3 L \approx 10.21017612416682802500 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_3 L \approx 10.21017612281303054547, \quad (6.2.92)$$

$$\beta_4 L \approx 13.35176877775662126347 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_4 L \approx 13.35176877775409312421, \quad (6.2.93)$$

$$\beta_5 L \approx 16.49336143134641450193 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_5 L \approx 16.49336143134640978077, \quad (6.2.94)$$

$$\beta_6 L \approx 19.63495408493620774039 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_6 L \approx 19.63495408493620773158, \quad (6.2.95)$$

$$\beta_7 L \approx 22.77654673852600097885 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_7 L \approx 22.77654673852600097884, \quad (6.2.96)$$

$$\beta_8 L \approx 25.91813939211579421732 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_8 L \approx 25.91813939211579421732. \quad (6.2.97)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πρώτα για την πρώτη, τη θεμελιώδη ιδιοτιμή β_1 ότι ο προσεγγιστικός τύπος (6.2.89), η αρχική της προσέγγιση, μας δίνει μόλις τέσσερα σωστά σημαντικά ψηφία (τα τέσσερα πρώτα ψηφία της τελικής της προσεγγίσεως). Αντίθετα για την ιδιοτιμή β_8 έχουμε είκοσι δύο σωστά σημαντικά ψηφία ήδη από την αρχική της προσέγγιση (6.2.89) χωρίς καθόλου τη χρήση της μεθόδου των Newton-Raphson ή άλλης αριθμητικής μεθόδου. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ακρίβεια της αρχικής προσεγγίσεως ολοένα και αυξάνει καθώς αυξάνει το n . Μια τόσο μεγάλη ακρίβεια των αρχικών προσεγγίσεων δεν είναι βέβαια η συνηθισμένη περίπτωση σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Έτσι, γενικά μιλώντας, η σπουδαιότητα των αριθμητικών μεθόδων στις επιλύσεις αλγεβρικών και υπερβατικών εξισώσεων που δε διαθέτουν κλειστές λύσεις αδικείται κάπως, υποβαθμίζεται άδικα από τα προηγούμενα αριθμητικά αποτελέσματα. Είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα των αριθμητικών μεθόδων για τον Πολιτικό Μηχανικό, που τα τεχνικά προβλήματά του δε διαθέτουν γενικά (σχεδόν ποτέ!) κλειστές λύσεις. Ούτε και το παρόν σχετικά απλό πρόβλημα καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνηθούς δοκού με πάκτωση-άρθρωση στα άκρα της διαθέτει!

Φυσικά με διαίρεση δια L των προηγούμενων αριθμητικών τιμών $\beta_n L$ γνωρίζουμε τώρα πλήρως τις ιδιοτιμές β_n στο παρόν πρόβλημα συνηθούς δοκού με πάκτωση-κύλιση στα άκρα της $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε πια θαυμάσια να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (6.2.47) (δεύτερη σχέση εκεί) ορισμού της βοηθητικής αυτής σταθεράς β , ώστε να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις συνηθούς δοκού. Έτσι με $\beta = \beta_n$ (έχουμε άπειρες ιδιοτιμές β_n , όπως είδαμε προηγουμένως: σχέσεις (6.2.89)!) διαπιστώνουμε ότι

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}, \quad \text{οπότε} \quad \beta_n^2 = \sqrt{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}} = \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad \text{και τελικά} \quad \omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.2.98)$$

για τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες (για την ακρίβεια κυκλικές ιδιοσυχνότητες) ω_n .

Αν μάλιστα στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών χρησιμοποιήσουμε τους προσεγγιστικούς τύπους (6.2.89): $\beta_n \approx (4n + 1)\pi/(4L)$ για τις ιδιοτιμές αυτές β_n , θα πάρουμε τους εξής προσεγγιστικούς τύπους για τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n :

$$\omega_n \approx \left[\frac{(4n + 1)\pi}{4L} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (6.2.99)$$

Αν θέλουμε μάλιστα, χρησιμοποιούμε το νέο σύμβολο $\tilde{\omega}_n$ για τις προσεγγιστικές αυτές ιδιοσυχνότητες ω_n ($\tilde{\omega}_n \approx \omega_n$). Ξαναγράφουμε έτσι τους προηγούμενους τύπους (6.2.99) στην ελάχιστα διαφορετική μορφή τους

$$\tilde{\omega}_n = \left[\frac{(4n + 1)\pi}{4L} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (6.2.100)$$

Τώρα πλέον δεν υπάρχει το σύμβολο \approx της προσεγγίσεως. Το αποφύγαμε έχοντας δηλώσει ευθύς εξαρχής τις προσεγγιστικές ιδιοσυχνότητες ω_n , για την ακρίβεια τις προσεγγιστικές κυκλικές ιδιοσυχνότητες, με το σύμβολο $\tilde{\omega}_n$. Σημειώνουμε ότι η Ελληνική περισπωμένη πάνω σε σύμβολα (για παράδειγμα, εδώ πάνω στο σύμβολο ω , δηλαδή $\tilde{\omega}_n$) αναφέρεται γενικά σε προσεγγίσεις των αντίστοιχων ποσοτήτων, στην περίπτωσή μας των κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων (και απλούστερα των ιδιοσυχνοτήτων) $\omega_n \approx \tilde{\omega}_n$ στις παρούσες καμπτικές ιδιοταλαντώσεις.

Τελειώνοντας αυτό το εδάφιο, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ιδιοσυχνότητες ω_n μιας δοκού είναι πολύ σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ας εξηγήσουμε λίγο τον ισχυρισμό μας αυτό. Σε ένα απλό μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) με φυσική κυκλική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ γνωρίζουμε ήδη από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II ότι, αν τύχει και υπάρξει εξωτερική φόρτιση $p(t)$ και αυτή με κυκλική συχνότητα $\omega = \omega_0$, τότε παρουσιάζεται δυστυχώς το ανεπιθύμητο φαινόμενο του συντονισμού. Ανάλογα ισχύουν βέβαια και εδώ, παρόλο που η δοκός δεν είναι μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, αλλ' είναι απειροβάθμιο μηχανικό σύστημα, όπως αποκαλεί συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός ένα συνεχές (και όχι διακριτό)

μηχανικό σύστημα. (Προφανώς η δοκός είναι συνεχές μηχανικό σύστημα, ενώ αντίθετα ένα σύστημα μαζών-ελατηρίων είναι διακριτό μηχανικό σύστημα. Εντούτοις μερικές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός προσεγγίζει για υπολογιστική ευκολία συνεχή συστήματα με διακριτά.)

Επομένως με τις ιδιοσυχνότητες ω_n γνωστές (εδώ σε μια συνήθη δοκό σε καμπτική καταπόνηση) ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να φροντίζει να μην «εκτίθεται» η δοκός του σε εξωτερικές φορτίσεις με συχνότητα ω μία από τις ιδιοσυχνότητες αυτές, έστω την ω_p : $\omega = \omega_p$ ή με παραπλήσια συχνότητα: $\omega \approx \omega_p$. Έτσι θα αποφευχθεί ο συντονισμός. Συνήθως όμως δεν είναι στο χέρι του Πολιτικού Μηχανικού να επιλέγει ο ίδιος τη συχνότητα (ή τις συχνότητες) ω μιας φορτίσεως $p(x, t)$ της δοκού του, π.χ. από ένα όχημα σε μια γέφυρα ή από ένα σεισμό σε μια κατασκευή. Για το λόγο αυτό πρέπει κατά τη μελέτη της δικής του κατασκευής (με τη δοκό στοιχείο αυτής) να φροντίζει εκ των προτέρων (και όχι εκ των υστέρων!) η κατασκευή του (εδώ η δοκός που εξετάζουμε) να μην έχει τέτοιες ιδιοσυχνότητες ω_n . Δηλαδή να φροντίζει ώστε να μην υπάρχουν σε μια κατασκευή (εδώ απλά δοκό) ιδιοσυχνότητες ω_n που να συμπίπτουν (ή έστω να είναι κοντά) σε συχνότητες ω της εξωτερικής φορτίσεως $p(x, t)$, η οποία επιβάλλεται εξωτερικά στην κατασκευή (εδώ στη δοκό).

B6.2.5.6. Υπολογισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως

Από τις ιδιοτιμές β_n που έχουμε ήδη προσδιορίσει μόλις παραπάνω βρήκαμε και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n . Αυτό το κατορθώσαμε με βάση τον τύπο (6.2.98) και τον προσεγγιστικό τύπο (6.2.99) ή (ισοδύναμα) (6.2.100). Τώρα ήρθε πια η στιγμή να προσδιορίσουμε και τις αντίστοιχες ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων (ή απλούστερα ιδιομορφές ταλαντώσεων και ακόμη πιο απλά ιδιομορφές) $X_n(x)$ για τη συνήθη δοκό μας. Πρόκειται για ένα σχετικά εύκολο καθήκον. Προχωράμε επομένως άμεσα στον προσδιορισμό των ιδιομορφών $X_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) για τη συνήθη δοκό σε καμπτικές ταλαντώσεις που εξετάζουμε με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα.

Πραγματικά αρκεί να χρησιμοποιήσουμε εδώ τη σχέση (6.2.56) ξαναγράφοντάς την στην κάπως διαφορετική μορφή

$$X_n(x) = A_n[\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n(\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)] \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.101)$$

Στις ιδιομορφές $X_n(x)$ με τη χρήση του δείκτη n τονίσαμε το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές β_n είναι άπειρες, όπως ήδη είδαμε. Επομένως έχουμε και άπειρες ιδιομορφές $X_n(x)$ με την καθεμία τους να αντιστοιχεί σε διαφορετική ιδιοτιμή β_n άρα και σε διαφορετική ιδιοσυχνότητα ω_n . Επίσης βγάλαμε κοινό παράγοντα το συντελεστή A και θέσαμε προς διευκόλυνσή μας $-B_n/A_n = c_n$. Αλλ' ο λόγος B_n/A_n μας είναι γνωστός από τις σχέσεις (6.2.72). Άρα οι βοηθητικές σταθερές c_n προσδιορίζονται ως εξής:

$$c_n = -\frac{B_n}{A_n} = \frac{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad c_n = -\frac{B_n}{A_n} = \frac{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} \quad (6.2.102)$$

(συνεχώς με $n = 1, 2, \dots$). Παρατηρούμε ότι το δεύτερο κλάσμα υπολογισμού των σταθερών c_n διαφέρει από το πρώτο μόνο σε δύο πρόσημα: τώρα συν (αντί πλην) μεταξύ των δύο όρων και στον αριθμητή του και στον παρονομαστή του.

Είναι βέβαια γνωστό και επίσης προφανές ότι το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) ή το αντίστοιχο και κάπως πιο πλήρες σύστημα (6.2.78) έως (6.2.81), εφόσον διαθέτουν μια μη τετριμμένη (μη μηδενική λύση), θα διαθέτουν άπειρες τέτοιες λύσεις. Όμως οι λύσεις αυτές θα διαφέρουν η μία από την άλλη μόνο κατά μία πολλαπλασιαστική σταθερά. Το συμπέρασμα είναι ότι τελικά στις πιο πάνω ιδιομορφές $X_n(x)$ η σταθερά A_n είναι αδύνατο να υπολογισθεί. Με άλλες λέξεις οι ιδιομορφές αυτές $X_n(x)$ είναι βέβαια καθορισμένες, αλλά με μία αυθαίρετη πολλαπλασιαστική σταθερά A_n σε καθεμία από αυτές. Πολύ συχνά οι ιδιομορφές $X_n(x)$ καθορίζονται, κανονικοποιούνται κατά κάποιο συγκεκριμένο τρόπο που να καθορίζει τη σταθερά αυτή A_n και να εξασφαλίζει το μονοσήμαντο προσδιορισμό της κάθε ιδιομορφής $X_n(x)$.

Ο ευκολότερος τρόπος για το σκοπό αυτό είναι να καθορισθεί η σταθερά A_n ίση με ένα ($A_n = 1$) για καθεμία ιδιομορφή $X_n(x)$. Με αυτήν την υπόθεση, που σε τίποτε σημαντικό δε μας βλάπτει, οι αμέσως πιο πάνω τύποι (6.2.101) για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ παίρνουν τις απλούστερες μορφές

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.103)$$

Τις μορφές αυτές τις υιοθετούμε εδώ απλά χάριν απλότητας και, φυσικά, για να έχουμε μονοσήμαντες εκφράσεις των ιδιομορφών $X_n(x)$.

Μια εναλλακτική δυνατότητα, που όμως δε θα την προτιμήσουμε εδώ, είναι να ορίσουμε τη σταθερά A_n της κάθε ιδιομορφής $X_n(x)$ στην πιο πάνω σχέση (6.2.101), έτσι ώστε η σχετική νόρμα $N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx$, που ορίστηκε στη σχέση (6.2.44), να είναι απλά ίση με τη μονάδα: $N_n = 1$.

Καταλήγοντας, με γνωστές τις ιδιοτιμές β_n μας είναι επίσης γνωστές τόσο (α) οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n από τους τύπους (6.2.98) όσο και (β) οι αντίστοιχες ιδιομορφές $X_n(x)$ από τους τύπους (6.2.103). Οι συντελεστές c_n στους τύπους αυτούς (6.2.103) υπολογίζονται άμεσα από τους πρώτους (με πλην) ή τους δεύτερους (με συν) τύπους (6.2.102). (Ακριβώς το ίδιο κάνει!)

Τα αποτελέσματα αυτά για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ της δοκού και ειδικότερα η ιδιότητα της ορθογωνιότητάς τους (ή ορθογωνικότητάς τους) μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμα. Συγκεκριμένα με τη χρήση τους θα μπορέσουμε να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.1) των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού: είτε (α) ελεύθερων (με $p(x, t) \equiv 0$) είτε (β) εξαναγκασμένων (με $p(x, t) \neq 0$). Με την επίλυση αυτή θα ασχοληθούμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Σημειώνουμε τέλος ότι με ανάλογο τρόπο εργασίας μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες ω_n και τις ιδιομορφές $X_n(x)$ και σε άλλα ήδη στηρίξεως (ή ελλείψεως στηρίξεως) των άκρων μιας συνήθους δοκού. Τέτοιες δοκοί είναι η αμφίπακτη δοκός, ο πρόβολος, η απόλυτα ελεύθερη δοκός, κλπ. (Την αμφιέριστη δοκό τη μελετήσαμε ήδη στην Ενότητα Α9.2 στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.) Θα ήταν μια ενδιαφέρουσα άσκηση για τον αναγνώστη Πολιτικό Μηχανικό η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ω_n και των ιδιομορφών $X_n(x)$ για τις δοκούς αυτές. Δεν υπάρχει καμία επιπλέον δυσκολία ή διαφορά στη μεθοδολογία σε σύγκριση με τα αποτελέσματα αυτού του εδαφίου. Αναφέρουμε τα αποτελέσματα: (α) για την αμφίπακτη δοκό και (β) για τον πρόβολο:

(α) Πρώτα για την αμφίπακτη δοκό: Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τώρα τη μορφή

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1. \quad (6.2.104)$$

Οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ (με $n = 1, 2, \dots$) δίνονται ξανά από τους τύπους

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με} \quad c_n = \frac{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L}. \quad (6.2.105)$$

Εντούτοις, επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.104) είναι στην αμφίπακτη δοκό εντελώς διαφορετική από την αντίστοιχη εξίσωση $\tanh \beta L = \tan \beta L$ για τη δοκό με πάκτωση-κύλιση, το ίδιο θα ισχύει και για τις ιδιοτιμές β_n , τις ιδιοσυχνότητες ω_n και τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$.

(β) Τέλος για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό άκρο του $x = L$: Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τώρα τη μορφή

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1, \quad (6.2.106)$$

δηλαδή απλά με -1 αντί 1 στο δεξιό μέλος σε σύγκριση με την αντίστοιχη εξίσωση (6.2.104) για την αμφίπακτη δοκό. Στη συνέχεια οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με} \quad c_n = \frac{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} \quad (6.2.107)$$

με μόνη διαφορά από τους τύπους για την αμφίπακτη δοκό το πρόσημο συν στους συντελεστές c_n .

B6.2.6. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους**B6.2.6.1. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών**

Προχωράμε τώρα στο κύριο μέρος αυτής της Ενότητας Β6.2. Τούτο είναι απλά η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.1), που διέπει το φαινόμενο των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Επαναλαμβάνουμε την τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό αυτή εξίσωση:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.108)$$

Όπως γνωρίζουμε, στην εξίσωση αυτή EI είναι η **δυσκαμψία** της δοκού: **μέτρο ελαστικότητας** E του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της επί **ροπή αδρανείας** I της διατομής της ως προς τον **ουδέτερο άξονα** της διατομής αυτής στην κάμψη. Πρόκειται για τον άξονα της διατομής της δοκού που αντιστοιχεί στις υποθετικές ίνες της δοκού (δεν είναι ανάγκη να υπάρχουν και σ' αλήθεια οι ίνες αυτές!) που ούτε εφελκούνται, αλλ' ούτε και θλίβονται στην κάμψη. Επίσης ρA είναι η **γραμμική πυκνότητα** της δοκού: πυκνότητα ρ του υλικού της επί εμβαδόν A της διατομής της. Τέλος $p(x, t)$ είναι η γνωστή **κάθετη κατανεμημένη φόρτιση** κατά μήκος της και $v = v(x, t)$ το **βέλος κάμψεως** της, η **κάθετη μετατόπιση** (ή **εγκάρσια μετατόπιση**) των σημείων της. Αυτό το βέλος κάμψεως $v(x, t)$ είναι βέβαια και η άγνωστη συνάρτηση που επιδιώκουμε εδώ να προσδιορίσουμε.

Ομολογουμένως από εκπαιδευτικής απόψεως θα έπρεπε να ξεκινήσουμε από τις ελεύθερες ταλαντώσεις (με εξωτερική φόρτιση $p(x, t) \equiv 0$, απλούστερη περίπτωση) και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με $p(x, t) \neq 0$, δυσκολότερη περίπτωση). Εντούτοις, για να κερδίσουμε χώρο και χρόνο, θα ξεκινήσουμε από τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, δηλαδή από την ίδια τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (6.2.108). Οι ελεύθερες ταλαντώσεις θα θεωρηθούν έτσι σαν μια ειδική περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων: η περίπτωση όπου απλά $p(x, t) \equiv 0$. Θα υποθέσουμε επίσης ότι ισχύουν και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή $t = 0$)

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (6.2.109)$$

για την αρχική θέση $f(x)$ και την αρχική ταχύτητα $g(x)$ των σημείων x ($0 \leq x \leq L$) της δοκού μας αντίστοιχα. (Φυσικά και οι δύο αυτές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ υποτίθενται γνωστές.)

Θεωρούμε λοιπόν μια συγκεκριμένη συνήθη δοκό (αμφίπακτη, αμφιέρειστη, πρόβολο, πακτωμένη στο ένα άκρο και με κύλιση στο άλλο, κλπ.). Έτσι έχουμε και τέσσερις εξίσου συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες ανά δύο στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Τις συνοριακές αυτές συνθήκες θα τις λάβουμε υπόψη μέσω των ιδιομορφών καμπτικών ταλαντώσεων $X_n(x)$, που ήδη γνωρίζουμε καλά να προσδιορίζουμε και τις θεωρούμε επομένως γνωστές.

Η κρίσιμη ιδέα που χρησιμοποιείται στην παράγραφο αυτή είναι η εξής: Αν δεν έχουμε καθόλου φόρτιση $p(x, t)$ στη δοκό μας ($p(x, t) \equiv 0$), τότε βέβαια με τη μέθοδο του **χωρισμού των μεταβλητών** (ή των **χωριζόμενων μεταβλητών**) οδηγούμαστε στις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.9) (χωρική, τετάρτης τάξεως) και (6.2.10) (χρονική, δευτέρας τάξεως). Από αυτές η χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει σαν λύσεις της τις ιδιομορφές $X_n(x)$ της δοκού. Αυτές είχαμε την ευκαιρία να τις μελετήσουμε και να τις προσδιορίσουμε πλήρως στις προηγούμενες παραγράφους αυτής της Ενότητας Β6.2. Φυσικά κάθε ιδιομορφή $X_n(x)$ αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή β_n της χωρικής διαφορικής εξίσωσης (6.2.9) ή καλύτερα (6.2.12) και απόλυτα ισοδύναμα σε μια ιδιοσυχνότητα ω_n . Επαναλαμβάνουμε με έμφαση ότι τις ιδιομορφές αυτές $X_n(x)$ τις προσδιορίζουμε έτσι, ώστε να πληρούνται και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε άκρο $x = 0$ και $x = L$ της δοκού. Κατά συνέπεια απλά η χρήση των ιδιομορφών $X_n(x)$ σημαίνει και σίγουρη πλήρωση των συνοριακών συνθηκών είτε στηρίξεως είτε ελεύθερου άκρου της δοκού. Τις έχουμε καταγράψει στις σχέσεις (6.2.19) για τα τρία βασικά άκρα δοκών. Τέλος λοιπόν με τις συνοριακές συνθήκες!

Προχωράμε τώρα στις χρονικές ιδιοσυναρτήσεις $T_n(t)$. Προφανώς αυτές προσδιορίζονται με βάση τις ίδιες ιδιοσυχνότητες ω_n που προέκυψαν μαζί με τις ιδιομορφές $X_n(x)$. Αυτό είναι προφανές από το χωρισμό των μεταβλητών (6.2.8) και έχει ήδη οδηγήσει στη χρονική λύση (6.2.11). Την ξαναγράφουμε και εδώ με τις ιδιοσυχνότητες ω_n αντί γενικά με την κυκλική συχνότητα ω :

$$T_n(t) = E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t = G_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.110)$$

Κατά συνέπεια οι ιδιοσυναρτήσεις $v_n(x, t)$ της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.2): της εξίσωσης των ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων της δοκού

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ξανά με } v = v(x, t) \quad (6.2.111)$$

θα είναι απλά

$$v_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) \equiv T_n(t) X_n(x) = (E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) X_n(x). \quad (6.2.112)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές $v_n(x, t)$ δηλώνουν τους **τρόπους ταλαντώσεως** της δοκού, καθεμία και ένα διαφορετικό τρόπο ταλαντώσεως.

Με **υπέρθωση** (ισοδύναμα **επαλληλία**) των ιδιοσυναρτήσεων (των τρόπων ταλαντώσεως) $v_n(x, t)$ οδηγούμαστε στη λύση (σε μορφή σειράς συναρτήσεων) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.111). Η λύση αυτή θα έχει προφανώς τη μορφή

$$v_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) X_n(x). \quad (6.2.113)$$

Στη λύση αυτή ο δείκτης h τέθηκε, για να δηλωθεί το γεγονός ότι η εξίσωση (6.2.111) είναι ομογενής: αναφέρεται σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις της δοκού με $p(x, t) \equiv 0$.

Στην ίδια λύση $v_h(x, t)$ παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.111) (με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, που ήδη περιγράψαμε στην Παράγραφο Β6.2.2). Επιπλέον επαληθεύονται σίγουρα και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού. Αυτό το πετύχαμε με τον κατάλληλο προσδιορισμό των ιδιομορφών $X_n(x)$ στην προηγούμενη Παράγραφο Β6.2.5. Κι όμως η λύση (6.2.113) δεν έχει μέχρι τώρα προσδιορισθεί πλήρως: συνεχίζει να περιλαμβάνει σταθερές: τις E_n και F_n : δύο απειρίες σταθερών που δεν τις έχουμε υπολογίσει ακόμη. Ο τρόπος που θα τις προσδιορίσουμε είναι βέβαια μέσω των αρχικών συνθηκών (6.2.109): για την αρχική θέση $f(x)$ και την αρχική ταχύτητα $g(x)$ των σημείων της δοκού.

Δεν προχωράμε στην εργασία αυτή, ώστε να αναφερθούμε γενικότερα και στην περίπτωση υπάρξεως μιας κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως $p(x, t) \neq 0$ στην δοκό. Δηλαδή θα επιλύσουμε τη γενικότερη (τη μη ομογενή με ειδική περίπτωση την ομογενή) διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.108). Αυτή αφορά γενικότερα στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της δοκού (σ' αυτές $p(x, t) \neq 0$) με τις ελεύθερες ταλαντώσεις της (εκεί $p(x, t) \equiv 0$) απλά μια ειδική περίπτωση. Αναφέρουμε ότι κατανοούμε βέβαια πως από εκπαιδευτικής απόψεως θα ήταν προτιμότερο να ασχοληθούμε πρώτα με τις ελεύθερες ταλαντώσεις και έπειτα με τις εξαναγκασμένες, ακριβώς όπως συμβαίνει και στη βιβλιογραφία. Αλλά είπαμε: πραγματευόμαστε πρώτα τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις για οικονομία χώρου και χρόνου και αποδεχόμαστε κάθε σχετική κριτική στην επιλογή μας αυτή, που είναι αμφισβητήσιμης εκπαιδευτικής ορθότητας. Αυτό συμβαίνει, επειδή πηγαίνουμε από τη γενική περίπτωση ($p(x, t) \neq 0$) προς την ειδική ($p(x, t) \equiv 0$) αντί αντίστροφα.

B6.2.6.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της δοκού

Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με εξωτερική φόρτιση της δοκού $p(x, t) \neq 0$) θα ήταν ένα πάρα πολύ σοβαρό λάθος να αποδεχθούμε τη λύση $v_h(x, t)$ στη σχέση (6.2.113) σαν πιθανή λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.108), την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με } v = v(x, t). \quad (6.2.114)$$

Η λύση $v_n(x, t)$ που προαναφέραμε έχει προκύψει στην Παράγραφο Β6.2.2 με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και αφορά στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (6.2.111): αυτή με $p(x, t) \equiv 0$. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**, η οποία αφορά σε μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς. Τη μέθοδο αυτή είχαμε ήδη την ευκαιρία να την εκθέσουμε στην Ενότητα Β5.6 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5 με την εφαρμογή της στη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Εδώ απλά θα εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς μέθοδο στην αμέσως πιο πάνω επίσης μη ομογενή εξίσωση (6.2.114): στην εξίσωση των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Βέβαια στο παρόν πρόβλημα είναι πολύ καλύτερα να μιλάμε για **ιδιομορφές** αντί για **ιδιοσυναρτήσεις**, επειδή ο όρος ιδιομορφές έχει επικρατήσει στην ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού σε προβλήματα αξονικών ιδιοταλαντώσεων ράβδων και καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκών. Μπορούμε επομένως να αποκαλούμε την παρούσα μέθοδο **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές**, εννοείται σε **ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων**.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή απλά δεχόμαστε ότι οι σταθερές E_n και F_n στη λύση (6.2.113) δεν είναι πια (στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις) απλά σταθερές, όπως συνέβαινε εύλογα στις ελεύθερες ταλαντώσεις, εκεί με βάση τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (6.2.3): $v(x, t) = X(x)T(t)$. Εδώ τις θεωρούμε συναρτήσεις του χρόνου t : $E_n = E_n(t)$ και $F_n = F_n(t)$. Το ίδιο ακριβώς είχαμε κάνει και στις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Έτσι πετύχαμε να επιλύουμε μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με βάση τις λύσεις των αντίστοιχων ομογενών εξισώσεων. Άρα η **μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις** (εδώ καλύτερος όρος είναι **ιδιομορφές**) θα μπορούσε ίσως να έχει αποκληθεί και **μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων**. Εντούτοις ο τελευταίος αυτός όρος πάρα πολύ σπάνια χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς.

Επομένως τώρα με $E_n = E_n(t)$ και $F_n = F_n(t)$ η λύση μας (6.2.113) παίρνει τη γενικότερη μορφή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n(t) \cos \omega_n t + F_n(t) \sin \omega_n t] X_n(x) \quad (6.2.115)$$

(χωρίς πλέον τη χρήση του δείκτη h : δεν έχουμε πια μια ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς). Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η μορφή αυτή $v(x, t)$ είναι απόλυτα ικανή να αποτελέσει τη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγωγούς (6.2.114) για τις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού με $p(x, t) \neq 0$. Είναι ικανή εξαιτίας του ότι περιέχει δύο απειρίες προς το παρόν μη προσδιορισμένων χρονικών συναρτήσεων $E_n(t)$ και $F_n(t)$. Οι συναρτήσεις αυτές θα μπορέσουν να «αντιμετωπίσουν» το δεξιό μέλος $p(x, t)$ της μη ομογενούς πια εξισώσεως (6.2.114): την κατανεμημένη φόρτιση της δοκού. Αυτό το έχουμε δει ήδη στην Ενότητα Β5.6, εκεί για τη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως και με μία μόνο απειρία άγνωστων συναρτήσεων, αρχικά των συναρτήσεων $C_n(t)$. Εδώ γενικεύουμε στη δοκό. Τίποτε παραπάνω!

Μια στιγμή όμως! Προσωρινή διακοπή της εργασίας μας! Πού πάμε; Τόσο οι συναρτήσεις $E_n(t)$ όσο και οι συναρτήσεις $F_n(t)$ στη λύση $v(x, t)$ που επιδιώκουμε να βρούμε είναι αυθαίρετες συναρτήσεις που θέλουμε να τις προσδιορίσουμε κατάλληλα. Άρα και ολόκληρος ο χρονικός παράγοντας

$$q_n(t) = E_n(t) \cos \omega_n t + F_n(t) \sin \omega_n t \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.116)$$

στη λύση (6.2.115) θα είναι και αυτός μια αυθαίρετη συνάρτηση $q_n(t)$. Άρα δεν υπάρχει κανένας απολύτως λόγος να ασχολούμαστε χωριστά με τις δύο χρονικές συναρτήσεις $E_n(t)$ και $F_n(t)$. Απλά ξαναγράφουμε τη λύση $v(x, t)$ που αναζητούμε στο παρόν πρόβλημα στη συντομότερη μορφή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.117)$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε όλη την απειρία των άγνωστων συναρτήσεων $q_n(t)$ (με $n = 1, 2, \dots$). Το ίδιο περίπου είχαμε κάνει και στην Ενότητα Β5.6 στο πρόβλημα της διαχύσεως.

Με άλλα λόγια στη λύση (6.2.117) που υιοθετούμε και που θέλουμε να προσδιορίσουμε απλά πήραμε αρχικά τη λύση (6.2.113) της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως. Στη συνέχεια ουσιαστικά θέσαμε τις άγνωστες συναρτήσεις $q_n(t)$ στις θέσεις των χρονικών ιδιοσυναρτήσεων $T_n(t)$. Έτσι θα έχουμε επαρκώς μεγάλη γενικότητα στη λύση αυτή και θα μπορέσουμε να την προσαρμόσουμε, ώστε να προσδιορίσουμε τελικά τη λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (6.2.114) των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού μας. Επομένως η κατάσταση είναι απλή, πολύ απλή: άγνωστες χρονικές συναρτήσεις $q_n(t)$ (προς προσδιορισμό) αντί για $T_n(t)$ (γνωστές χρονικές ιδιοσυναρτήσεις). Καλή ήταν όμως και η δυνατότητα ερμηνείας αυτής της διαδικασίας μέσω της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων, μια δυνατότητα που επιχειρήσαμε να εξηγήσουμε προηγουμένως. Όποιος αναγνώστης/όποια αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός το επιθυμεί ας δώσει σημασία και στην ερμηνεία αυτή. Αλλιώς η απλή γενίκευση από $T_n(t)$ σε $q_n(t)$ αρκεί.

Είμαστε τώρα πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των αγνώστων χρονικών συναρτήσεων $q_n(t)$ στη μορφή (6.2.117) της λύσεως $v(x, t)$, την οποία έχουμε υιοθετήσει. Και ασφαλώς οι γνωστές (με τη μέθοδο της προηγούμενης Παραγράφου Β6.2.5) χωρικές συναρτήσεις $X_n(x)$, οι ιδιομορφές ταλαντώσεως, είναι πάντα παρούσες στη μορφή αυτή (6.2.117) της λύσεως $v(x, t)$. Είναι οι «στυλοβάτες» της λύσεως αυτής. Είναι οι συναρτήσεις που μας εξασφαλίζουν όχι μόνο την πλήρωση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.9), αλλά και όλων (και των τεσσάρων) συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση που εξετάζουμε. Τις χρονικές αυτές συναρτήσεις $q_n(t)$ που απομένει να βρούμε ο Πολιτικός Μηχανικός συνήθως τις αποκαλεί με τον κάπως παράξενο (ή τουλάχιστον μη αναμενόμενο άμεσα) όρο **κύριες συντεταγμένες** (ή **κανονικές συντεταγμένες** ή **συντεταγμένες των τρόπων ταλαντώσεως**). Αυτό το κάνει, επειδή είναι οι συντεταγμένες στο «σύστημα αξόνων» των ιδιομορφών $X_n(x)$ στη σειρά (6.2.117) με «άξονες» των συντεταγμένων αυτών τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. (Υπάρχει φυσικά κάποια αναλογία με το πολύ απλούστερο και πολύ πιο γνωστό σε μας σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) .)

Προχωράμε τώρα στο βασικό έργο μας: στον προσδιορισμό των κύριων συντεταγμένων $q_n(t)$.

B6.2.6.3. Εξισώσεις για τον προσδιορισμό των κύριων συντεταγμένων

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω θα προσδιορίσουμε τη λύση $v(x, t)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (6.2.114): της εξισώσεως των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού, την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.118)$$

Τη λύση αυτή την αναζητούμε στη μορφή (6.2.117) του αναπτύγματος σε ιδιομορφές $X_n(x)$. Την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.119)$$

Πρόκειται για **υπέρθηση** (ισοδύναμα **επαλληλία**) τρόπων ταλαντώσεως, εδώ $v_n(x, t) = q_n(t) X_n(x)$.

Είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε την τέταρτη χωρική (ως προς τη θέση x : $0 \leq x \leq L$) μερική παράγωγο καθώς και τη δεύτερη χρονική (ως προς το χρόνο t : $t \geq 0$) μερική παράγωγο της πιο πάνω λύσεως (6.2.119) που πάμε να προσδιορίσουμε. Και τις δύο αυτές μερικές παραγώγους τις υπολογίζουμε πολύ εύκολα σαν αθροίσματα των παραγώγων των όρων της σειράς (6.2.119) όρο προς όρο. Προκύπτουν έτσι οι ζητούμενες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''''(x) \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.2.120)$$

(Οι τόνοι δηλώνουν χωρικές παραγώγους: ως προς τη θέση x είτε συνήθεις είτε μερικές παραγώγους, ενώ οι τελείες χρονικές: ως προς το χρόνο t , πάλι είτε συνήθεις είτε μερικές παραγώγους.)

Αντικαθιστούμε αμέσως αυτές τις δύο μερικές παραγώγους στη διαφορική εξίσωση (6.2.118) των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Προκύπτει η εξίσωση

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''''(x) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.121)$$

Στην εξίσωση αυτή η φόρτιση $p(x, t)$ της δοκού είναι βέβαια μια γνωστή συνάρτηση. Επίσης και οι συναρτήσεις $X_n(x)$ είναι και αυτές γνωστές. Είναι οι ιδιομορφές που επαληθεύουν τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.9) και καλύτερα (6.2.12). Την ξαναγράφουμε (αλλ' εδώ με δείκτες n : είναι άπειρες οι ιδιοτιμές β_n , οι σχετικές ιδιοσυχνότητες ω_n και οι αντίστοιχες ιδιομορφές $X_n(x)$):

$$X_n''''(x) - \beta_n^4 X_n(x) = 0, \quad \text{οπότε} \quad X_n''''(x) = \beta_n^4 X_n(x). \quad (6.2.122)$$

Φυσικά στη λύση (6.2.119) που έχουμε ήδη υιοθετήσει άγνωστες είναι μόνο οι συναρτήσεις $q_n(t)$: οι κύριες (ή κανονικές) συντεταγμένες στο **σύστημα αξόνων των ιδιομορφών ταλαντώσεως** $X_n(x)$, που καλείται και **κύριο σύστημα αξόνων** στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού.

Σημειώνουμε βέβαια ότι με αντικατάσταση της τέταρτης παραγώγου $X_n''''(x)$ από τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.122) (στη δεύτερη γραφή της) στην εξίσωση (6.2.121) η τελευταία παίρνει την κάπως προτιμότερη, αρκετά πιο εξυπηρετική για μας στη δουλειά μας μορφή

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 q_n(t) X_n(x) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.123)$$

Στην εξίσωση αυτή η τέταρτη παράγωγος $X_n''''(x)$ δεν παρουσιάζεται πια, έχει ήδη εξαλειφθεί. Ευτυχώς έχουμε έτσι απαλλαγεί από την παράγωγο αυτή! Μας δίνεται επομένως η δυνατότητα να ξαναγράψουμε τώρα την ίδια ακριβώς εξίσωση (6.2.123) στην ακόμη απλούστερη μορφή της

$$\sum_{n=1}^{\infty} [EI \beta_n^4 q_n(t) + \rho A \ddot{q}_n(t)] X_n(x) = p(x, t), \quad (6.2.124)$$

απόλυτα ισοδύναμα στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\rho A \ddot{q}_n(t) + EI \beta_n^4 q_n(t)] X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.125)$$

Αν μάλιστα δεν είμαστε ακόμη ευχαριστημένοι, λαμβάνουμε υπόψη μας και τον τύπο (6.2.12) ορισμού της βοηθητικής σταθεράς $\beta = \sqrt[4]{\rho A \omega^2 / (EI)}$, οπότε για την n οτή ιδιοτιμή $\beta = \beta_n$

$$\beta_n^4 = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI}, \quad \text{άρα} \quad EI \beta_n^4 = \rho A \omega_n^2. \quad (6.2.126)$$

(Βέβαια εδώ το σύμβολο ω_n δηλώνει τη γνωστή μας ιδιοσυχνότητα ω που αντιστοιχεί στον n κύριο τρόπο ταλαντώσεως $v_n(x, t)$ της δοκού και στη σχετική ιδιομορφή $X_n(x)$.) Με αυτόν τον τρόπο η πιο πάνω εξίσωση (6.2.125) γράφεται και στην ακόμη πιο ευπρόσδεκτη σε μας τελική μορφή

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.127)$$

Έχουμε κάνει ήδη αρκετά βήματα προς τη λύση $v(x, t)$ που ζητάμε να βρούμε για το βέλος κάμψεως της δοκού μας υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση, οπότε η δοκός οδηγείται σε ταλάντωση. Κάνουμε τώρα ένα ακόμη βήμα και μάλιστα ένα πάρα πολύ σημαντικό βήμα. Αυτό το βήμα αφορά στο ανάπτυγμα μιας συναρτήσεως $h(x)$ στις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ (πάλι με $n = 1, 2, \dots$) της συνήθους δοκού που εξετάζουμε. Το ανάπτυγμα αυτό το χρειαζόμαστε, μας είναι απόλυτα αναγκαίο στην παραπέρα πορεία μας προς τη λύση $v(x, t)$ που θέλουμε να βρούμε.

B6.2.6.4. Ανάπτυγμα συναρτήσεως σε ιδιομορφές

Ξέρουμε ήδη από την Παράγραφο Β6.2.4 ότι οι ιδιομορφές $X_n(x)$ των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων (ή ορθογωνικών) συναρτήσεων για κάθε συνηθισμένο είδος συντοριακών συνθηκών στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού. Επαναλαμβάνουμε τη θεμελιώδους σημασίας σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.37)

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.128)$$

η οποία μας είναι απόλυτα αναγκαία στο σημείο αυτό. Φυσικά για $m = n$ (μία μόνο ιδιομορφή: η $X_m(x)$) δεν έχουμε δύο ιδιομορφές. Έχουμε μόνο μία, την $X_m(x)$, και είμαστε βέβαιοι αρκετά έξυπνοι, ώστε να μην προσδοκούμε το μηδενισμό του ολοκληρώματος (6.2.128) με το τετράγωνο $X_m^2(x)$ σαν ολοκληρωτέα συνάρτηση s' αυτό, όταν $m = n$. Στην ειδική αυτή περίπτωση όπου $m = n$ έχουμε τελικά τις σχέσεις (6.2.45) εδώ σε απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\rho A \int_0^L X_m^2(x) dx = M_m \quad \text{πάλι με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.129)$$

Στη σχέση αυτή τα σύμβολα M_m ($M_m > 0$) δηλώνουν τις **γενικευμένες μάζες** της δοκού, όπως τις αποκαλεί ο Πολιτικός Μηχανικός, που ορίζονται από τους τύπους αυτούς (6.2.129).

Η όλη εργασία για το ανάπτυγμα μιας συναρτήσεως $h(x)$ στις ιδιομορφές $X_n(x)$ είναι απόλυτα ανάλογη με εκείνη στις σειρές Fourier, που μας είναι πολύ γνωστή ήδη από το Κεφάλαιο Α16 των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων. (Θυμίζουμε ότι εκεί είχαμε εισαγάγει τις σειρές Fourier.) Μόνο που στις σειρές Fourier είχαμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ή, έστω, τις σχετικές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις), ενώ εδώ έχουμε στη θέση τους τις ιδιομορφές $X_n(x)$ της δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση. Δηλαδή εδώ μπορούμε να έχουμε **γενικευμένες σειρές Fourier** ως προς τις ιδιομορφές αυτές: αναπτύγματα συναρτήσεων $h(x)$ στις ιδιομορφές $X_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Σημειώνουμε ότι για τη σύγκλιση των γενικευμένων αυτών σειρών Fourier είναι σκόπιμο η συνάρτηση $h(x)$ να επαληθεύει τις ίδιες ακριβώς συντοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού που επαληθεύουν και όλες οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. Υποθέτουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ που έχουμε στις αρχικές συνθήκες (6.2.109) πληρούν τις συντοριακές συνθήκες της δοκού. Επομένως και οι σχετικές γενικευμένες σειρές Fourier, δηλαδή τα αναπτύγματα των συναρτήσεων αυτών $f(x)$ και $g(x)$ στις ιδιομορφές $X_n(x)$ θα συγκλίνουν.

Ας γίνουμε τώρα κάπως σαφέστεροι θεωρώντας μια γνωστή χωρική συνάρτηση $h(x)$ κατά μήκος της δοκού μας (με $0 \leq x \leq L$). Αναζητούμε εδώ τη γενικευμένη σειρά Fourier της, καλύτερα το ανάπτυγμά της στις ιδιομορφές $X_n(x)$, στη μορφή

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \quad (6.2.130)$$

με H_n τους σχετικούς και προς το παρόν άγνωστους συντελεστές της σειράς αυτής (του αναπτύγματος αυτού). Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών H_n πρέπει αρχικά να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη του αναπτύγματος αυτού (6.2.130) επί την ιδιομορφή $X_m(x)$ για κάποια συγκεκριμένη τιμή του δείκτη m . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$h(x)X_m(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \right] X_m(x) \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.131)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως αυτής ως προς x κατά μήκος της δοκού, δηλαδή στο διάστημα $0 \leq x \leq L$. Έτσι συνάγουμε ότι

$$\int_0^L h(x)X_m(x) dx = \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \right] X_m(x) dx. \quad (6.2.132)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x)$ είναι συγκλίνουσα και ακόμη ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Απειροστικού Λογισμού στο Κεφάλαιο των Σειρών για την εναλλαγή της σειράς μεταξύ ολοκληρώσεως και αθροίσεως στο δεξιό μέλος της πιο πάνω σχέσεως (6.2.132). Υπό τις προϋποθέσεις αυτές, οι οποίες γενικά πληρούνται, η ίδια σχέση (6.2.132) γράφεται στη μορφή

$$\int_0^L h(x) X_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_n \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx \right]. \quad (6.2.133)$$

Δηλαδή τώρα στο δεξιό μέλος έχουμε μια σειρά (ένα άπειρο άθροισμα) ολοκληρωμάτων (το καθένα με συντελεστή H_n) αντί για ένα ολοκλήρωμα σειράς (απείρου αθροίσματος).

Γνωρίζουμε όμως από τις σχέσεις ορθογωνιότητας (6.2.128) των ιδιομορφών $X_n(x)$ ότι όλα σχεδόν αυτά τα ολοκληρώματα $\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx$ στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.133) είναι ίσα με το μηδέν. Λέμε όλα σχεδόν, απλά γιατί το ολοκλήρωμα εκείνο που αντιστοιχεί στην τιμή $n = m$ του δείκτη αθροίσεως n δεν είναι ίσο με το μηδέν. Είναι το ολοκλήρωμα (6.2.129) με τιμή $M_m/(\rho A)$: την αντίστοιχη γενικευμένη μάζα M_m της δοκού δια της γραμμικής πυκνότητάς της ρA . Με τις σκέψεις αυτές το δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.133) απλοποιείται αφάνταστα, αφού μόλις ένας όρος απομένει από ολόκληρη σειρά: ο όρος με $n = m$. Έτσι το μέλος αυτό παίρνει την τελική μορφή

$$\int_0^L h(x) X_m(x) dx = \frac{M_m}{\rho A} H_m \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.134)$$

Λύνοντας τώρα ως προς το μέχρι τώρα άγνωστο συντελεστή H_m , βρίσκουμε αμέσως ότι τελικά

$$H_m = \frac{\rho A}{M_m} \int_0^L h(x) X_m(x) dx \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.135)$$

Με τον τρόπο αυτό έχουν πλέον προσδιορισθεί όλοι οι συντελεστές H_n (ή H_m , το ίδιο κάνει!) του αναπτύγματος (6.2.130) μιας συναρτήσεως $h(x)$ κατά μήκος της δοκού στις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ της ίδιας δοκού. Οι ιδιομορφές αυτές εξαρτώνται φυσικά από τις συνοριακές συνθήκες (στηρίξεως ή ελλείψεως στηρίξεως) στα άκρα της. Ξαναγράφουμε (σε μία μόνο γραμμή) το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.130) της συναρτήσεως $h(x)$ τώρα μαζί με τους συντελεστές του

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \quad \text{με συντελεστές } H_n = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L h(x) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.136)$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τις νόρμες $N_n = M_n/(\rho A)$ των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$, όπως ήδη τις έχουμε ορίσει στις σχέσεις (6.2.44). Έτσι το ανάπτυγμα (6.2.136) σε ιδιομορφές θα γραφότανε και σε λίγο πιο απλοποιημένη μορφή απλά θέτοντας $\rho A/M_n = 1/N_n$ στο δεξιό μέλος του. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τις γενικευμένες μάζες M_n από τις νόρμες $N_n = M_n/(\rho A)$ των ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$. Και πάρα πολύ σωστά ενεργεί έτσι: οι γενικευμένες μάζες M_n έχουν κάποια φυσική ερμηνεία (τουλάχιστον δηλώνουν μάζες!). Είναι επίσης γενικεύσιμες και σε μη συνήθεις δοκούς: εν προκειμένω σε δοκούς με μεταβλητή γραμμική πυκνότητα $\rho A(x) := \rho(x)A(x)$ κατά μήκος τους.

Επαναλαμβάνουμε τέλος ότι το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.136) (πρώτη σχέση) με συντελεστές H_n (δεύτερη σχέση) αποτελεί ουσιαστικά μια γενίκευση των σειρών Fourier. Πρόκειται για γενίκευση από τις τριγωνομετρικές σειρές Fourier (ή την ισοδύναμή τους μιγαδική εκθετική σειρά Fourier) σε ιδιομορφές $X_n(x)$ καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού.

B6.2.6.5. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες

Καταρχήν ξαναγράφουμε τη σχέση (6.2.127) στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho A} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x). \quad (6.2.137)$$

Τη μορφή αυτή τη συγκρίνουμε με το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.136) (πρώτος τύπος). Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε άμεσα ότι πραγματικά η σχέση (6.2.137) εκφράζει το ανάπτυγμα της συναρτήσεως $p(x, t)/(\rho A)$ σε ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ φυσικά με μεταβλητή τη θέση x κατά μήκος της δοκού (με $0 \leq x \leq L$) και όχι το χρόνο t . Συνάγουμε επίσης το πρόσθετο συμπέρασμα ότι στο ανάπτυγμα αυτό (6.2.137) οι σχετικοί συντελεστές (οι οποίοι δεν εξαρτώνται βέβαια από τη θέση x , ενώ εξαρτώνται φυσικά από το χρόνο t) είναι οι χρονικές συναρτήσεις

$$H_n(t) := \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.138)$$

Όμως, όπως ήδη αποδείξαμε στο προηγούμενο Εδάφιο Β6.2.6.4, οι συναρτήσεις αυτές $H_n(t)$, δηλαδή οι συντελεστές του αναπτύγματος (6.2.137) σε ιδιομορφές $X_n(x)$, μπορούν να προσδιορισθούν από τους τύπους (6.2.135) ή καλύτερα (6.2.136) (δεύτεροι τύποι). Άρα ισχύουν οι σχέσεις

$$H_n(t) := \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L \frac{p(x, t)}{\rho A} X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.139)$$

Απλοποιώντας μάλιστα τη γραμμική πυκνότητα ρA στο δεξιό μέλος, παίρνουμε τις σχέσεις

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^L p(x, t) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.140)$$

Πρόκειται βέβαια για μη ομογενείς (ασφαλώς μόνο στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις!) γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με άγνωστες συναρτήσεις τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$. Φυσικά οι ιδιοσυχνότητες ω_n (οι οποίες αντιστοιχούν στις ιδιομορφές $X_n(x)$ και στους σχετικούς τρόπους ταλαντώσεως $v_n(x, t) = q_n(t)X_n(x)$) είναι ήδη γνωστές από τους τελευταίους τύπους (6.2.98): $\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{EI/(\rho A)}$ μέσω των αντίστοιχων ιδιοτιμών β_n . Οι ιδιοτιμές αυτές β_n υπολογίζονται πρώτες από τη σχετική **χαρακτηριστική εξίσωση** ή **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων**, π.χ. από την εξίσωση (6.2.67): $\tanh \beta L = \tan \beta L$ για δοκό με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της.

Τώρα στα δεξιά μέλη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.140) έχουν παρουσιασθεί τα ολοκληρώματα

$$P_n(t) = \int_0^L p(x, t) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.141)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι βέβαια γνωστές ποσότητες (καλύτερα συναρτήσεις του χρόνου t). Τούτο ισχύει, επειδή τόσο η κάθετη κατανομημένη φόρτιση $p(x, t)$ όσο και οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις. Τις νέες αυτές χρονικές συναρτήσεις $P_n(t)$ ο Πολιτικός Μηχανικός τις αποκαλεί στα προβλήματα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκών **γενικευμένες φορτίσεις**. Με τη χρήση τους οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.140) παίρνουν τις συντομότερες στη γραφή μορφές τους

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.142)$$

(Παρατηρούμε ότι στα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών παρουσιάζονται οι λόγοι $P_n(t)/M_n$ των γενικευμένων φορτίσεων $P_n(t)$ δια των αντίστοιχων γενικευμένων μαζών M_n .) Αυτές οι εξισώσεις (6.2.142) είναι οι μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως που θα μας επιτρέψουν να προσδιορίσουμε τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$, οι οποίες είναι προς το παρόν άγνωστες συναρτήσεις. Αυτές είναι οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται στον τύπο (6.2.117) ή (6.2.119) της λύσεως σε μορφή σειράς $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)X_n(x)$ του παρόντος προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών για τις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού.

Ας σημειώσουμε επίσης και την πραγματικά ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα πλήρη αναλογία μεταξύ των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.142) για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ και της πολύ γνωστής και επίσης συνήθους διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (6.2.143)$$

Η εξίσωση αυτή αναφέρεται σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) χωρίς όμως απόσβεση (δηλαδή με $c = 0$). Με δεδομένη μάλιστα την αναλογία αυτή είναι καθόλα δικαιολογημένος ο όρος **γενικευμένες φορτίσεις** για τις χρονικές συναρτήσεις $P_n(t)$. Παρατηρούμε πως αυτές υπεισέρχονται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.142), ακριβώς όπως η αληθινή φόρτιση $p(t)$ υπεισέρχεται στη συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.143).

Φυσικά η ίδια ομοιότητα παραμένει και στην εναλλακτική μορφή των ίδιων συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τις μάζες να έχουν μεταφερθεί στα αριστερά μέλη τους. Πραγματικά η συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.143) του χωρίς απόσβεση αρμονικού ταλαντωτή ήταν γραμμένη αρχικά στην ισοδύναμη μορφή της

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t). \quad (6.2.144)$$

Η μορφή αυτή προκύπτει άμεσα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με μεταφορά όμως του όρου της δυνάμεως του ελατηρίου $-ku(t)$ στο αριστερό μέλος, εκεί βέβαια με πρόσημο σύν. Τώρα ανάλογα οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.142) για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις μπορούν κι αυτές να γραφούν στις απόλυτα ισοδύναμες μορφές τους

$$M_n\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 M_n q_n(t) = P_n(t) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.145)$$

με τις γενικευμένες μάζες M_n τώρα στα αριστερά μέλη τους.

Μπορούμε μάλιστα να εισαγάγουμε και τις νέες ποσότητες

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad \text{ισοδύναμα} \quad K_n = \rho A \omega_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx = EI \beta_n^4 \int_0^L X_n^2(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.146)$$

με βάση τις σχέσεις (6.2.129) και (6.2.126). Αυτές τις ποσότητες ο Πολιτικός Μηχανικός τις καλεί **γενικευμένες δυσκαμψίες**. Τότε οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.145) παίρνουν τις μορφές

$$M_n\ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad \text{ξανά με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.147)$$

Αυτές καθιστούν και πάλι πλήρη την αναλογία μεταξύ της κλασικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή (6.2.144) και των αντίστοιχων αυτών εξισώσεων (6.2.147) στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ των ταλαντώσεων αυτών.

◆ **Συμπέρασμα:** Το συμπέρασμά μας είναι ότι οι καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού (εδώ χωρίς απόσβεση) ανάγονται σε ένα σύστημα άπειρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Όλες τους είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με την εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου μάζας m και ελατηρίου σταθεράς k (και πάλι χωρίς απόσβεση). Έτσι ένα συνεχές μηχανικό σύστημα, ένα απειροβάθμιο μηχανικό σύστημα, η δοκός, έχει αναχθεί σε μια **άπειρη ακολουθία μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων** (με $n = 1, 2, \dots$). Το καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε έναν **κύριο τρόπο ταλάντωσης** της δοκού $v_n(x, t) = q_n(t)X_n(x)$: ταλάντωση κατά τον «άξονα» που καθορίζει η ιδιομορφή $X_n(x)$. Για την αναγωγή που προαναφέραμε δεν έχει γίνει καμία προσέγγιση στην αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.108). Και φυσικά ούτε **διακριτοποίηση** της δοκού: ούτε αναγωγή της από **συνεχές μηχανικό σύστημα** σε **διακριτό**.

Επαναλαμβάνουμε τώρα όλες τις αντιστοιχίες των μηχανικών μεγεθών μας:

- Οι **γενικευμένες μάζες** M_n στη δοκό αντιστοιχούν στη **μάζα** m του υλικού σημείου.
- Οι **γενικευμένες δυσκαμψίες** $K_n = \omega_n^2 M_n$ στη δοκό αντιστοιχούν στη **σταθερά του ελατηρίου** $k = \omega_0^2 m$. (Φυσικά ο όρος **δυσκαμψία** πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο σε φαινόμενα κάμψης, όχι σε φαινόμενα που δεν έχουν σχέση με κάμψη, π.χ. όχι δυσκαμψία ελατηρίου!)
- Οι **γενικευμένες φορτίσεις** $P_n(t)$ στη δοκό αντιστοιχούν στη **φόρτιση** (στην **εξωτερική δύναμη**) $p(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο.
- Τέλος οι **κύριες συντεταγμένες** $q_n(t)$ στις καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού αντιστοιχούν στη **μετατόπιση** $u(t)$ του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του.

Κι αν ακόμη όλες αυτές οι έννοιες δεν είναι απόλυτα κατανοητές, εντούτοις ένα σημείο πρέπει σίγουρα να έχει γίνει πλήρως κατανοητό: Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού έχει αναχθεί στις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (6.2.142) και ισοδύναμα (6.2.147). Αυτές όμως οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συμπίπτουν απόλυτα με τη συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.143) και (6.2.144) αντίστοιχα του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k). Και από καθαρά μαθηματικής απόψεως (αν περιορισθούμε στην άποψη αυτή) τούτο μόνο είναι που μας ενδιαφέρει εδώ, ώστε να μπορέσουμε να προχωρήσουμε πιο κάτω στην επίλυση του παρόντος προβλήματος.

Β6.2.6.6. Οι λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις κύριες συντεταγμένες

Στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ισοδύναμα μάζας-ελατηρίου) για να προσδιορίσουμε πλήρως τη λύση της σχετικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (6.2.143) χρειάζεται ασφαλώς να γνωρίζουμε και τις δύο απαιτούμενες αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad (\text{αρχική μετατόπιση}) \quad \text{και επίσης} \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (\text{αρχική ταχύτητα}). \quad (6.2.148)$$

Τούτο είναι εύλογο από φυσικής απόψεως. Πώς να ξέρουμε τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, αν δεν ξέρουμε την αρχική θέση του u_0 και την αρχική ταχύτητά του v_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$; Είναι όμως εύλογο και από μαθηματικής απόψεως. Πώς να βρούμε μια συγκεκριμένη λύση (μερική ή ειδική λύση) της ισχύουσας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.143) χωρίς να διαθέτουμε δύο συνθήκες για τη λύση αυτή: εδώ κατά προτίμηση τις αρχικές συνθήκες;

Υποθέτοντας λοιπόν γνωστές τις αρχικές αυτές συνθήκες (6.2.148) η μη ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (6.2.143) μας δίνει τη ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. Είναι η γνωστή μας λύση (11.6.11) της Ενότητας Α11.6 στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Τη θυμίζουμε:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad \text{με} \quad t \geq 0 \quad (6.2.149)$$

και ασφαλώς με $\sin \omega_0(t - \tau) := \sin[\omega_0(t - \tau)]$. Η λύση αυτή προκύπτει είτε με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων είτε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που η χρήση του είναι ίσως και λίγο ευκολότερη στους σχετικούς υπολογισμούς. Η ίδια λύση $u(t)$ καλείται συχνά και **ολοκληρωτικός τύπος Duhamel** και το σχετικό συνελκτικό ολοκλήρωμα **ολοκλήρωμα Duhamel**.

Εδώ τώρα πίσω στο πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων μιας συνήθους δοκού ισχύει η ανάλογη συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.142). Ας την επαναλάβουμε

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.150)$$

Η λύση της θα είναι φυσικά ακριβώς παρόμοια με την πιο πάνω λύση (6.2.149). Απλά πρέπει να αλλάξουμε λίγο το συμβολισμό. Έτσι γράφουμε τη λύση της εξίσωσης αυτής (6.2.150) στη μορφή

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.151)$$

Βέβαια, αν και οι δύο ποσότητες $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ (που εκφράζουν τις δύο αρχικές συνθήκες στο παρόν πρόβλημα) θεωρηθούν γνωστές, τότε απλά έχουμε τη ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. Στην αντίθετη περίπτωση, αν ερμηνευθούν σαν αυθαίρετες σταθερές, τότε έχουμε τη γενική λύση. Εμείς φυσικά θέλουμε το πρώτο: να είναι γνωστές οι τιμές $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ στη λύση αυτή, ώστε να είναι η ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. (Έχουμε συγκεκριμένο πρόβλημα δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις και απαιτείται συγκεκριμένη λύση και όχι λύση με αυθαίρετες σταθερές σ' αυτήν!) Πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε τις δύο τιμές $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ και, δυστυχώς για μας, χρειάζεται να δουλέψουμε λίγο προς το σκοπό αυτό. Ξεκινάμε λοιπόν και σε λίγο θα τα έχουμε καταφέρει! *Ναι!*

Β6.2.6.7. Οι αρχικές συνθήκες για τις κύριες συντεταγμένες

Πρόκειται φυσικά να εκμεταλλευθούμε τις δύο αρχικές συνθήκες (6.2.109), που μας έχουν δοθεί για τη χρονική στιγμή $t = 0$: (α) την αρχική θέση $f(x)$ και (β) την αρχική ταχύτητα $g(x)$ των σημείων της συνήθους δοκού (με $0 \leq x \leq L$). Τις ξαναγράφουμε και εδώ, ώστε να τις θυμηθούμε καλύτερα και να τις χρησιμοποιήσουμε πολύ πιο εύκολα σε λίγο:

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (6.2.152)$$

Πολύ καλό είναι επίσης να ξαναγράψουμε και τη λύση $v(x, t)$ που ζητάμε στη μορφή (6.2.119) αναπτύγματος σε ιδιομορφές $X_n(x)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.153)$$

Γνωστές σ' αυτήν είναι οι ιδιομορφές $X_n(x)$ ταλαντώσεως της δοκού. Και τώρα είναι σχεδόν γνωστές και οι κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ με βάση τους ολοκληρωτικούς τύπους του Duhamel (6.2.151) για τον προσδιορισμό τους. Μόνο οι σταθερές $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ μας λείπουν ακόμη στους τύπους αυτούς. Λίγη υπομονή και θα τις προσδιορίσουμε κι αυτές με χρήση των δύο αρχικών συνθηκών (6.2.152).

Θέτουμε λοιπόν απλά $t = 0$ στο ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.153) και παίρνουμε με βάση και την πρώτη αρχική συνθήκη (6.2.152)

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) X_n(x). \quad (6.2.154)$$

Ανάλογα παραγωγίζουμε το ίδιο ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.153) ως προς το χρόνο t

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) X_n(x) \quad (6.2.155)$$

και παίρνουμε τώρα για $t = 0$ με βάση τη δεύτερη αρχική συνθήκη (6.2.152)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) X_n(x). \quad (6.2.156)$$

Τί ακριβώς μας δηλώνουν τα δύο αυτά αναπτύγματα σε ιδιομορφές $X_n(x)$, (6.2.154) και (6.2.156), για τις συναρτήσεις $f(x)$ (αρχική θέση) και $g(x)$ (αρχική ταχύτητα), που υπεισέρχονται στις δύο αρχικές συνθήκες (για $t = 0$) στη δοκό μας; Απλά ότι οι ποσότητες $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ που ζητάμε να προσδιορίσουμε δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι συντελεστές των δύο γνωστών συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα στα αναπτύγματά τους σε ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ για τη δοκό μας.

Με βάση λοιπόν τους δεύτερους τύπους (6.2.136) για τους συντελεστές H_n σε ανάπτυγμα σε ιδιομορφές κατά μήκος δοκού έχουμε από τα αναπτύγματα σε ιδιομορφές (6.2.154) και (6.2.156)

$$q_n(0) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L f(x) X_n(x) dx \quad \text{και} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L g(x) X_n(x) dx \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.157)$$

Με τον τρόπο αυτό λάβαμε πλήρως υπόψη μας και τις δύο αρχικές συνθήκες (6.2.152) και με τη βοήθειά τους προσδιορίσαμε όλες τις σταθερές $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ που χρειαζότανε να γνωρίζουμε στις λύσεις (6.2.151) (σε μορφή ολοκληρωτικών τύπων Duhamel) για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$.

Έτσι οι λύσεις αυτές $q_n(t)$, οι κύριες συντεταγμένες στο παρόν πρόβλημα καμπτικών ταλαντώσεων δοκού, είναι πια απόλυτα καθορισμένες σαν μερικές (ή ειδικές) λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.150), που αφορούν στο ίδιο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα οι αρχικές τιμές $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ υπολογίζονται από τους αμέσως πιο πάνω τύπους (6.2.157). Επίσης οι γενικευμένες φορτίσεις $P_n(t)$ προσδιορίζονται από τους τύπους (6.2.141). Τέλος οι ιδιομορφές $X_n(x)$ προσδιορίζονται με τον τρόπο που εκτενώς εκθέσαμε στην Παράγραφο Β6.2.5 με βάση τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού μας. Στην ίδια Παράγραφο Β6.2.5

προσδιορίσαμε επίσης και τις ιδιοσυχνότητες ω_n μέσω των ιδιοτιμών β_n που βρίσκονται σαν λύσεις της σχετικής υπερβατικής εξίσωσης. Άρα με γνωστές τόσο (α) τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ όσο και (β) τις ιδιομορφές $X_n(x)$ στις παρούσες εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού το βέλος κάμψεως της δοκού $v(x, t)$ ορίζεται πλήρως με βάση το ανάπτυγμα του (6.2.153) σε ιδιομορφές. Στη λύση αυτή έχουν ληφθεί κατάλληλα υπόψη τόσο (α) η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.118) όσο και (β) οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες και (γ) οι δύο αρχικές συνθήκες.

B6.2.7. Μηδενικές αρχικές συνθήκες και ελεύθερες ταλαντώσεις

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλαδή $f(x) \equiv 0$ και $g(x) \equiv 0$ στη σχέσεις (6.2.152), τότε προφανώς $q_n(0) = 0$ και $\dot{q}_n(0) = 0$ εξαιτίας των τύπων (6.2.157). Στην ειδική αλλά σημαντική αυτή περίπτωση οι λύσεις $q_n(t)$ στις σχέσεις (6.2.151) απλοποιούνται αρκετά παίρνοντας τις μορφές απλών ολοκληρωμάτων Duhamel (που είναι βέβαια χρονικά συνελκτικά ολοκληρώματα)

$$q_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.158)$$

Στην άλλη σημαντική ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων, δηλαδή ταλαντώσεων με μηδενική εξωτερική φόρτιση $p(x, t) \equiv 0$, οι γενικευμένες φορτίσεις $P_n(t)$ μηδενίζονται: $P_n(t) \equiv 0$. Τούτο είναι απόλυτα σαφές από τους τύπους υπολογισμού τους (6.2.141). Στην ενδιαφέρουσα αυτή περίπτωση οι τύποι (6.2.151) για τις λύσεις $q_n(t)$ απλοποιούνται πάλι και παίρνουν τις μορφές

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.159)$$

Αν βέβαια και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές: $f(x) \equiv 0$ και $g(x) \equiv 0$, αλλ' ούτε και φόρτιση υπάρχει: $p(x, t) \equiv 0$, τότε βέβαια γενικά (άμα δεν υπάρχουν ούτε ροπές στα άκρα της δοκού) ούτε καμπτική ταλάντωση της δοκού δε μπορεί να υπάρξει προς μεγάλη χαρά του Πολιτικού Μηχανικού.

B6.2.8. Γενικεύσεις και πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου

Τα πιο πάνω αποτελέσματα για τη λύση $v(x, t)$ του προβλήματος των ταλαντώσεων δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση γενικεύονται σε σωρεία προβλημάτων ιδιαίτερου ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Θεωρούμε σκόπιμο να αναφέρουμε επιγραμματικά μερικά από αυτά: (α) Μη συνήθεις δοκούς με μεταβλητή δυσκαμψία $EI(x)$ ή/και γραμμική πυκνότητα $\rho A(x)$ κατά μήκος τους. (β) Μη συνηθισμένες στηρίξεις σε άκρα δοκού (π.χ. μέσω ελατηρίου). (γ) Ταλαντώσεις δοκού με απόσβεση. (δ) Ταλαντώσεις δοκού με ταυτόχρονη σταθερή αξονική δύναμη N . (ε) Ταλαντώσεις δοκού που στηρίζεται πάνω σε ελαστική βάση (σε ελαστική θεμελίωση) με την υπόθεση Winkler. (στ) Ταλαντώσεις δοκού που οφείλονται σε σεισμούς: ένας σεισμός προκαλεί ουσιαστικά μια ισοδύναμη εξωτερική φόρτιση $p^*(x, t)$ πάνω στη δοκό. (ζ) Ταλαντώσεις **δοκού Timoshenko** με μοντελοποίηση πιο ακριβή από την παρούσα εξίσωση (6.2.118) για **δοκό Bernoulli-Euler**, κλπ.

Ανάμεσα στις πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου που ήδη εκθέσαμε περιλαμβάνονται πέρα από τις προηγούμενες γενικεύσεις (στις οποίες εξέχουσα θέση κατέχει η απόκριση μιας δοκού σε σεισμική φόρτιση) και διάφορες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Τέτοιες εφαρμογές αφορούν μεταξύ άλλων: (α) σε κινούμενα συγκεντρωμένα φορτία κατά μήκος της δοκού (που παριστάνονται με την κατάλληλη χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac) και (β) σε αρμονικές φορτίσεις της δοκού με συχνότητα ω . Στην περίπτωση αυτή, εάν δεν έχουμε απόσβεση των ταλαντώσεων και ταυτόχρονα η συχνότητα ω της εξωτερικής φορτίσεως συμπίπτει με μία ιδιοσυχνότητα ω_n της δοκού, τότε παρουσιάζεται το ανεπιθύμητο φαινόμενο του **συντονισμού**, που πρέπει να αποφεύγεται.

Όλα αυτά τα φαινόμενα και πολλά άλλα και εξίσου ενδιαφέροντα μπορεί να μελετήσει, τώρα που έχει επαρκείς μαθηματικές βάσεις πάνω στο θέμα, ο Πολιτικός Μηχανικός σε βιβλία Δυναμικής των Κατασκευών. Φυσικά ο τελικός στόχος του δεν είναι βέβαια απλά να επιλύει προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών: Είναι να συνάγει από τις λύσεις που προσδιορίζει τα αναγκαία συμπεράσματα για το σωστό σχεδιασμό των κατασκευών του, π.χ. τον **αντισεισμικό σχεδιασμό**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B7*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο πρόβλημα της ορθογωνικής συνήθους πλάκας με απλή στήριξη στις τέσσερις πλευρές της και με αυθαίρετη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ στην επιφάνειά της. Το πρόβλημα αυτό το λύνουμε με τη μέθοδο του Navier (1820) που βασίζεται σε διπλές ημιτονικές σειρές Fourier. Τη θεωρία τους την αναφέρουμε περιληπτικά. Στη συνέχεια επίσης περιληπτικά αναφερόμαστε και στην εναλλακτική μέθοδο του Lévy (1899) για το ίδιο πρόβλημα. Αυτή χρησιμοποιεί μόνο απλές ημιτονικές σειρές Fourier ανάγοντας το πρόβλημα της πλάκας σε ένα σύστημα άπειρων αλλά μη συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τετάρτης τάξεως.

Β7.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ NAVIER ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ

Β7.1.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

Η μέθοδος του Navier (1820) είναι η πρώτη και η πιο γνωστή μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων ορθογωνικών συνήθων πλακών υπό στατικές συνθήκες φορτίσεως και με απλή στήριξη (έδραση) και στις τέσσερις πλευρές τους: σε όλο το σύνορό τους. Θεωρούμε μια τέτοια πλάκα διαστάσεων a επί b (εδώ υποθέτουμε ότι $0 \leq x \leq a$ και $0 \leq y \leq b$), όπως αυτή που φαίνεται στο Σχήμα Β7.1 της επόμενης σελίδας. Η πλάκα έχει δυσκαμψία (τύπος (2.2.16) του Κεφαλαίου Β2)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.1.1)$$

με E το μέτρο ελαστικότητας και ν το λόγο του Poisson του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της και h το πάχος της. Η φόρτιση της πλάκας είναι κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x, y)$ (συνήθως σε $\text{Pa} \equiv \text{kN/m}^2$). Άγνωστη συνάρτηση είναι το **βέλος κάμψεως** της πλάκας $w(x, y)$.

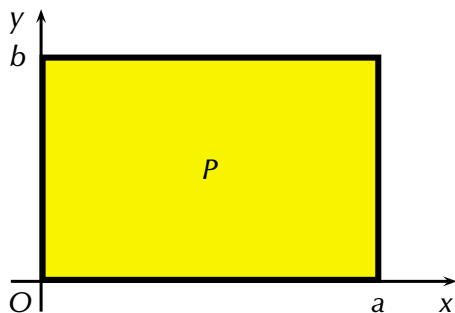
Όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο Β2.2.3 του Κεφαλαίου Β2, εξίσωση (2.2.15), το **βέλος κάμψεως** (που μερικές φορές καλείται και **βύθιση**) $w(x, y)$ συνήθους πλάκας P υπό στατικές συνθήκες φορτίσεως επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως

$$\nabla^4 w = \frac{p(x, y)}{D} \iff \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{με } w = w(x, y), \quad (x, y) \in P. \quad (7.1.2)$$

Εδώ βέβαια $\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2$ είναι ο διαρμονικός τελεστής, ενώ ∇^2 είναι ο τελεστής του Laplace.

Επιπλέον, όπως αποδεικνύεται στη Θεωρία των Πλακών (π.χ. στο Εφαρμοσμένο Notebook Συνήθεις Πλάκες, Ενότητα 2.3, Εντολή (9) στο Τεύχος 2: Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς), οι τρεις **ροπές** στη συνήθη πλάκα: οι δύο **ροπές κάμψεως** (ή **καμπτικές ροπές**) M_x και M_y και η **ροπή συστροφής** $M_{xy} = M_{yx}$ δίνονται από τους τρεις γνωστούς τύπους

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.1.3)$$



Σχήμα Β7.1: Ορθογωνική πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$, δηλαδή με $0 \leq x \leq a$ και $0 \leq y \leq b$. Η πλάκα θεωρείται συνήθης πλάκα (δηλαδή πλάκα με τις υποθέσεις του Kirchhoff) και με απλή στήριξη σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της).

Τώρα για την ορθογωνική πλάκα του αμέσως πιο πάνω Σχήματος Β7.1 με απλή στήριξη σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της) πρέπει να ισχύουν οι εξής συνοριακές συνθήκες:

$$w(0, y) = w(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad w(x, 0) = w(x, b) = 0 \quad (7.1.4)$$

για το βέλος κάμψεως (μηδενικό βέλος κάμψεως, $w = 0$, και στις τέσσερις πλευρές της πλάκας) και

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \quad (7.1.5)$$

για τις ροπές κάμψεως (ή καμπτικές ροπές). Παραγωγίζουμε τώρα τις δύο πρώτες σχέσεις (7.1.4) ως προς y και τις δύο τελευταίες σχέσεις (7.1.4) ως προς x . Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως πως

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b) = 0. \quad (7.1.6)$$

Κατά συνέπεια οι συνοριακές συνθήκες (7.1.5) με βάση τις σχέσεις (7.1.3) για τις ροπές κάμψεως M_x και M_y , αλλά και τις σχέσεις (7.1.6) που μόλις βρήκαμε, παίρνουν τις εξής τελικές τους μορφές:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0. \quad (7.1.7)$$

Σημειώνουμε ότι οι δύο πρώτες από τις τελικές αυτές σχέσεις, αν ξεχάσουμε τη μεταβλητή y , μας θυμίζουν τις αντίστοιχες σχέσεις για αμφιέριστη συνήθη δοκό $0 \leq x \leq a$, όπου η ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) $M = M(x)$ μηδενίζεται και στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = a$ της αμφιέριστης δοκού.

Η διαφορική εξίσωση (7.1.2) και οι συνοριακές συνθήκες (7.1.4) και (7.1.7) (οκτώ συνολικά συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε πλευρά της πλάκας: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ και $y = b$) αποτελούν το παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από το Navier (1820). Την ενδιαφέρουσα μέθοδο του Navier την αναφέρουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

B7.1.2. Διπλή ημιτονική σειρά Fourier για το βέλος κάμψεως της πλάκας

Για την επίλυση του πιο πάνω προβλήματος ορθογωνικής πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ δεχόμαστε το βέλος κάμψεως (ή βύθιση) της πλάκας στη μορφή της εξής διπλής ημιτονικής σειράς Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.8)$$

Οι συντελεστές w_{mn} αυτής της σειράς είναι προς το παρόν άγνωστοι, αλλά θα προσδιορισθούν με χρήση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (7.1.2). Το σημαντικό όμως με αυτήν τη σειρά Fourier είναι ότι πληρούνται αυτόματα οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (7.1.4) σε ολόκληρο το σύνορο της ορθογωνικής πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ που μελετάμε, αφού $\sin k\pi = 0$ για κάθε ακέραιη τιμή του k . Έπειτα παραγωγίζουμε τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) δύο φορές ως προς x και δύο φορές ως προς y . Προκύπτουν έτσι εύκολα οι νέες διπλές ημιτονικές σειρές Fourier

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.9) ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (7.1.7). Και ανάλογα η διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.10) ικανοποιεί τις δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες (7.1.7). Πλήρωση λοιπόν και αυτών των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών.

Το τελικό συμπέρασμά μας είναι ότι υιοθετώντας τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) στο παρόν πρόβλημα ορθογωνικής πλάκας με απλή στήριξη (έδραση) του συνόρου της, πετυχαίνουμε να πληρούνται και οι οκτώ συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της πλάκας (ανά δύο σε κάθε πλευρά της). Άρα τώρα το μόνο καθήκον μας στο παρόν πρόβλημα είναι η πλήρωση και της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους της πλάκας (7.1.2). Αυτό θα το πετύχουμε με τον κατάλληλο προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών w_{mn} στη διπλή σειρά Fourier (7.1.8) που υποθέσαμε για το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Navier στο πρόβλημα αυτό.

Αφού όμως χρησιμοποιήσαμε εδώ τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) για το βέλος κάμψεως $w(x, y)$, το ίδιο πρέπει να κάνουμε και για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας. Έτσι θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (7.1.2).

B7.1.3. Ανάπτυγμα συναρτήσεως σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας έχει τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.11)$$

Αυτή είναι απόλυτα ανάλογη με την αντίστοιχη σειρά Fourier (7.1.8) για το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της ίδιας πλάκας, τώρα όμως με συντελεστές p_{mn} , του οποίους θελουμε να προσδιορίσουμε εδώ.

Προς το σκοπό αυτό θυμόμαστε τους τύπους (5.2.61) και (5.2.62) της Παραγράφου Β5.2.10 του Κεφαλαίου Β5 για το ανάπτυγμα μιας γνωστής συναρτήσεως $h(x)$ σε απλή ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα $[0, L]$. Με βάση τον πρώτο από τους δύο αυτούς τύπους (5.2.61) έχουμε

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (7.1.12)$$

Στη σειρά αυτή οι συντελεστές b_n δίνονται από το δεύτερο τύπο, τον τύπο (5.2.62), δηλαδή

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.13)$$

Τώρα για την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας θεωρούμε προς στιγμή το y σταθερά (καλύτερα παράμετρο) αντί μεταβλητή. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε ανάλογα τη συνάρτηση αυτή $p(x, y)$ σε ημιτονική σειρά Fourier ως προς x μόνο και μάλιστα στο διάστημα $[0, a]$ κατά μήκος της πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ που εξετάζουμε. Έτσι παίρνουμε με βάση τον τύπο (7.1.12)

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7.1.14)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει για δείκτη στη σειρά αυτή το m αντί για το n στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.12). Φυσικά οι συντελεστές $p_m(y)$ θα μεταβάλλονται, αν αλλάζει η τιμή της σταθεράς (καλύτερα της παραμέτρου) y . Γι' αυτό τους δηλώνουμε με το σύμβολο $p_m(y)$. Και τώρα σύμφωνα με τον τύπο (7.1.13) έχουμε για τους συντελεστές αυτούς $p_m(y)$ (εδώ όμως με a αντί για L)

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.1.15)$$

Προφανώς οι συντελεστές $p_m(y)$ εξαρτώνται από τη σταθερά (ή καλύτερα την παράμετρο) y που στην πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$ που μελετάμε μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, b]$ κατά το πλάτος (όχι το μήκος) της πλάκας. Μπορούμε επομένως να επιστρέψουμε τώρα στην ερμηνεία του y σαν μεταβλητής αντί σαν σταθεράς (ή παραμέτρου). Είναι εύλογο αυτό. Με αυτήν την ερμηνεία του y

οι πιο πάνω συντελεστές $p_m(y)$ είναι συναρτήσεις του y . Και, όπως ήδη είπαμε, το y μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, b]$ κατά το πλάτος της πλάκας P και όχι στο διάστημα $[0, a]$ κατά το μήκος της.

Επομένως στο σημείο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα σε απλή ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα $[0, b]$ των ίδιων των πιο πάνω συντελεστών $p_m(y)$, τώρα όμως ως προς y , όχι ως προς x : οι συντελεστές $p_m(y)$ δεν εξαρτώνται από το x . Με διατήρηση του αρχικού δείκτη n στη βασική σειρά Fourier (7.1.12) (τώρα όμως ως προς y) παίρνουμε εδώ την αντίστοιχη σειρά

$$p_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7.1.16)$$

με συντελεστές p_{mn} . Επαναλαμβάνουμε ότι δείκτης της σειράς είναι το n . Γίνεται όμως και αναφορά μέσω του m στη συνάρτηση $p_m(y)$ που αναπτύσσουμε. Για τους συντελεστές αυτούς p_{mn} χρησιμοποιούμε τον τύπο (7.1.13) εδώ βέβαια ως προς y και στο διάστημα $[0, b]$. Προκύπτει άμεσα

$$p_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b p_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.17)$$

Ουσιαστικά τελειώσαμε τη δουλειά μας. Για να το κατανοήσουμε καλύτερα αυτό! Πρώτα-πρώτα στους αμέσως πιο πάνω τύπους (7.1.17) για τους συντελεστές p_{mn} της απλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.16) υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις $p_m(y)$ δίνονται από τους τύπους (7.1.15). Με βάση τους τύπους αυτούς (7.1.15) οι πιο πάνω τύποι (7.1.17) παίρνουν τις τελικές τους μορφές

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (x, y) \in P \quad (7.1.18)$$

με $P = [0, a] \times [0, b]$ την ορθογωνική συνήθη πλάκα μας, αφού προφανώς $(2/a)(2/b) = 4/(ab)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι με την εισαγωγή των εκφράσεων (7.1.16) των συναρτήσεων-συντελεστών $p_m(y)$ στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (ως προς x) (7.1.14) αυτή παίρνει αμέσως τη μορφή της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.11). Φαίνεται πολύ καθαρά αυτό! Άρα στη διπλή αυτή σειρά Fourier (7.1.11) οι συντελεστές p_{mn} (που δεν εξαρτώνται βέβαια ούτε από τη μεταβλητή x αλλ' ούτε και από τη μεταβλητή y) δίνονται από τους παραπάνω τελικούς μας τύπους (7.1.18).

Συνοψίζουμε τα πιο πάνω αποτελέσματα: σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier της μορφής (7.1.11) με $(x, y) \in P = [0, a] \times [0, b]$ οι συντελεστές της p_{mn} δίνονται από τους τύπους (7.1.18). Αυτοί περιλαμβάνουν ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σ' ολόκληρη την περιοχή P , εδώ στην πλάκα μας P .

B7.1.4. Η λύση του προβλήματος της ορθογωνικής πλάκας με διπλή ημιτονική σειρά Fourier

Είμαστε τώρα απόλυτα έτοιμοι να βρούμε τη λύση του παρόντος προβλήματος της ορθογωνικής πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ του Σχήματος Β7.1 με τη μέθοδο του Navier. Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι με χρήση της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.8) για το άγνωστο βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας πληρούνται και οι οκτώ συνοριακές συνθήκες (7.1.4) και (7.1.7) στις τέσσερις πλευρές (στο σύνορο) της πλάκας. Μας απομένει απλά η πλήρωση και της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (7.1.2). Έχουμε ήδη διαθέσιμες στις σχέσεις (7.1.9) και (7.1.10) τις δεύτερες μερικές παραγωγούς ως προς x και y αντίστοιχα της σειράς Fourier (7.1.8) του βέλους κάμψεως $w(x, y)$. Με δύο ακόμη ανάλογες μερικές παραγωγώσεις υπολογίζουμε όλες τις τέταρτες μερικές παραγωγούς που υπεισέρχονται στη διαφορική μας εξίσωση (7.1.2). Αυτές έχουν τις εξής μορφές:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.19)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.20)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.21)$$

Τώρα αντικαθιστούμε τόσο αυτές τις διπλές ημιτονικές σειρές Fourier για τις τέταρτες μερικές παραγωγούς του άγνωστου βέλους κάμψεως (ή βυθίσεως) $w(x, y)$ της πλάκας όσο και την αντίστοιχη σειρά Fourier (7.1.11) της γνωστής κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως $p(x, y)$ στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς της πλάκας (7.1.2). Συμπτύσσοντας τις τρεις διπλές ημιτονικές σειρές Fourier στο αριστερό μέλος σε μία μόνο ανάλογη σειρά Fourier, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.22)$$

Λάβαμε βέβαια υπόψη μας και τον τόσο στοιχειώδη αλγεβρικό τύπο $\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

Αυτήν την τελική μορφή (7.1.22) της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (7.1.2) της πλάκας (καλύτερα της συνήθους πλάκας) μπορούμε να τη γράψουμε και λίγο πιο απλά μεταφέροντας τη φόρτιση $p(x, y)$ από το δεξιό μέλος στο αριστερό μέλος και συμπτύσσοντας τις δύο σειρές Fourier (τώρα στο αριστερό μέλος) σε μία. Έτσι παίρνουμε το τελικό και τόσο απλό αποτέλεσμα

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} - \frac{p_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (7.1.23)$$

Έχουμε λοιπόν μια διπλή ημιτονική σειρά Fourier στην ορθογωνική πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$ ίση με το μηδέν σ' ολόκληρη την πλάκα. Άρα σύμφωνα με τους τύπους (7.1.18) για τους συντελεστές μιας διπλής ημιτονικής σειράς Fourier, ειδικά εδώ της σχετικής σειράς για τη μηδενική συνάρτηση στο δεξιό μέλος, όλοι οι συντελεστές Fourier στο αριστερό μέλος της πιο πάνω τελικής σχέσεως (7.1.23) θα πρέπει να μηδενίζονται. Επομένως είναι αναγκαίο να ισχύουν οι σχέσεις

$$\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} - \frac{p_{mn}}{D} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.24)$$

Λύνοντας τώρα ως προς τους άγνωστους συντελεστές w_{mn} , τους προσδιορίζουμε όλους πλήρως

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.25)$$

Επομένως, γνωρίζοντας την κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της παρούσας ορθογωνικής πλάκας, προσδιορίζουμε τους συντελεστές p_{mn} της αντίστοιχης διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.11) από τους τύπους (7.1.18). Γνωρίζοντας και τη δυσκαμψία $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ της πλάκας, τύπος (7.1.1), προσδιορίζουμε από τους αμέσως πιο πάνω τύπους (7.1.25) και τους συντελεστές w_{mn} της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.8) του βέλους κάμψεως (ή της βυθίσεως) $w(x, y)$ της πλάκας. Άρα το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας θα δίνεται πάντοτε από τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) με τους συντελεστές της w_{mn} προσδιορισμένους όπως ήδη έχει αναφερθεί.

Ας σημειωθεί τέλος ότι με γνωστό το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της παρούσας ορθογωνικής πλάκας από τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) με μερικές παραγωγίσεις της σειράς αυτής μπορούν πολύ εύκολα να υπολογισθούν οι δύο ροπές κάμψεως M_x και M_y καθώς και η ροπή συστροφής $M_{xy} = M_{yx}$ με τη χρήση των τύπων (7.1.3). Παραπέρα ανάλογα μπορούν να προσδιορισθούν οι τέμνουσες δυνάμεις, αλλά και οι ίδιες οι τάσεις στην πλάκα. Οι τάσεις όμως μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση z του πάχους της πλάκας (με $-h/2 \leq z \leq h/2$ όπου h είναι το πάχος της πλάκας).

B7.1.5. Ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση στην ορθογωνική πλάκα

Στην ειδική αλλά και τόσο συχνή και σημαντική περίπτωση που η φόρτιση της πλάκας P είναι ομοιόμορφη (σταθερή), δηλαδή $p(x, y) = p_0$ σ' ολόκληρη την πλάκα με υπολογισμό (εύκολος είναι!) των διπλών ολοκληρωμάτων (7.1.18) πάνω στην πλάκα προκύπτουν οι αντίστοιχοι συντελεστές

$$p_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{εάν είτε το } m \text{ είτε το } n \text{ είναι άρτιος αριθμός,} \\ \frac{16p_0}{\pi^2 mn}, & \text{εάν τόσο το } m \text{ όσο και το } n \text{ είναι περιττοί αριθμοί.} \end{cases} \quad (7.1.26)$$

Στη συνέχεια με χρήση των τύπων (7.1.25) προσδιορίζονται και οι αντίστοιχοι συντελεστές w_{mn} για το βέλος κάμψεως (ή τη βύθιση) $w(x, y)$ της πλάκας στη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8).

B7.1.6. Ορθογωνική πλάκα επί ελαστικής βάσεως

Με μικρή παραλλαγή της πιο πάνω μεθόδου του Navier για την πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$ του Σχήματος Β7.1 μπορεί να λυθεί εύκολα και το αντίστοιχο πρόβλημα πλάκας επί ελαστικής βάσεως (συνήθως του εδάφους) ξανά με απλή στήριξη στο σύνορό της. Στην περίπτωση αυτή λόγω της αντιδράσεως του εδάφους στη βύθιση της πλάκας που υποτίθεται πως είναι προς το έδαφος υπάρχει και κάθετη καταναμεμημένη φόρτιση $-kw(x, y)$ αντίθετη της εξωτερικής φορτίσεως $p(x, y)$. (Εδώ k είναι το σχετικό μέτρο του εδάφους.) Άρα στη διαφορική εξίσωση (7.1.2) στο δεξιό μέλος αντί $p(x, y)/D$ έχουμε τώρα $[p(x, y) - kw(x, y)]/D$. Μεταφέροντας τον όρο $-kw(x, y)/D$ στο αριστερό μέλος και τροποποιώντας ελαφρά την πιο πάνω μέθοδο, λύνουμε εύκολα και το πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας επί ελαστικής βάσεως και πάλι με χρήση διπλών ημιτονικών σειρών Fourier.

B7.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΛΕΝΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ

Το μειονέκτημα της μεθόδου του Navier (1820) για την ορθογωνική πλάκα είναι ότι αυτή χρησιμοποιεί διπλές σειρές Fourier. Αντίθετα η εναλλακτική μέθοδος του Lévy (1899) χρησιμοποιεί μόνο απλές σειρές Fourier. Συγκεκριμένα για τη γνωστή κάθετη καταναμεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας η μέθοδος του Lévy αρκείται στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.14), την επαναλαμβάνουμε

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (7.2.1)$$

Σημειώνεται εδώ ότι οι συντελεστές της $p_m(y)$ έχουν ήδη προσδιορισθεί από τις σχέσεις (7.1.15).

Σύμφωνα με την παρούσα μέθοδο του Lévy δε μας είναι αναγκαία και η παραπέρα ανάπτυξη των συντελεστών $p_m(y)$ σε νέες σειρές Fourier (τώρα όμως ως προς y). Ανάλογα για το άγνωστο βέλος κάμψεως (τη βύθιση) $w(x, y)$ της πλάκας δεχόμαστε την αντίστοιχη ημιτονική σειρά Fourier

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (7.2.2)$$

Τώρα αντικαθιστούμε αυτές τις δύο απλές (και όχι διπλές όπως πριν!) ημιτονικές σειρές Fourier στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (7.1.2) της πλάκας εκτελώντας βέβαια και τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις της σειράς (7.2.2) για το αριστερό μέλος της. Προκύπτει εύκολα ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w_m''(y) + w_m''''(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (7.2.3)$$

Κατά συνέπεια με ανάλογες σκέψεις όπως και πριν συμπεραίνουμε πως οι συντελεστές των ημιτονικών όρων του αριστερού και του δεξιού μέλους πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως θα έχουμε

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w_m''(y) + w_m''''(y) = \frac{p_m(y)}{D}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.2.4)$$

Πρόκειται για ένα σύστημα άπειρων μη συζευγμένων μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τετάρτης τάξεως. Τις λύνουμε αρκετά εύκολα με τις μεθόδους που γνωρίζουμε από το Μέρος Α για τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Συγκεκριμένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για τις αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις (που εδώ όμως οδηγεί σε χαρακτηριστικές εξισώσεις με διπλές ρίζες) και τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ή τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για τις μη ομογενείς εξισώσεις. Εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί φυσικά και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, αν και αυτή δεν προτιμάται συνήθως εδώ. Δεν πρέπει βέβαια να λησμονούνται και οι συνοριακές συνθήκες για $y = 0$ και $y = b$. Έτσι προσδιορίζονται οι συντελεστές $w_m(y)$ (οι οποίοι είναι βέβαια συναρτήσεις του y) στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.2.2) για το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της ορθογωνικής πλάκας P .

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *B8*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα λύσουμε το πρόβλημα της μονοδιάστατης στερεοποίησης πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου στρώματος αργίλου στην Εδαφομηχανική με βάση τη σχετική κλασική θεωρία στερεοποίησης του Terzaghi (1923). Εξετάζουμε πρώτα το πρόβλημα του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου, δηλαδή με το πάνω όριό του διαπερατό, ενώ το κάτω αδιαπέρατο. Στη συνέχεια εξετάζουμε και το πρόβλημα του ανοικτού στρώματος αργίλου, δηλαδή και με τα δύο όριά του (πάνω και κάτω) διαπερατά. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην εφαρμογή αυτή είναι η κλασική μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών του Κεφαλαίου Β5. Με αυτήν προσδιορίζονται οι σχετικές ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις και τελικά η άγνωστη συνάρτηση. Αυτή εκφράζει την πρόσθετη υδροστατική πίεση (ή υπερπίεση του νερού των πόρων) στο στρώμα της αργίλου. Τα τελικά αποτελέσματα είναι σε μορφές σειρών Fourier, εδώ με ημιτονικούς όρους: γενικευμένη ημιτονική σειρά Fourier για το πρώτο πρόβλημα και συνήθης ημιτονική σειρά Fourier για το δεύτερο πρόβλημα.

Β8.1. ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΗΜΙΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΥ (ΗΜΙΚΛΕΙΣΤΟΥ) ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΑΡΓΙΛΟΥ

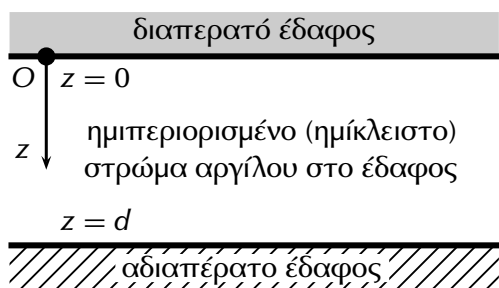
Β8.1.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Έχουμε ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο Β2.1.4 του Κεφαλαίου Β2 στο ιδιαίτερα ενδιαφέρον φαινόμενο της **στερεοποίησης** πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου **στρώματος** (ή ίσως καλύτερα **στρώσεως**) αργίλου στην **Εδαφομηχανική** και στη σχετική **θεωρία στερεοποίησης** του Terzaghi (1923). Το φαινόμενο της στερεοποίησης αφορά στην αποβολή του νερού από στρώμα (ή στρώση) εδάφους. Στη μονοδιάστατη στερεοποίηση στρώματος εδάφους που το υποθέτουμε εδώ από άργιλο (δηλαδή έχουμε στρώμα ή στρώση αργίλου) αναφέραμε ότι ισχύει η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως στη μορφή της (2.1.54). Αυτήν την εξίσωση την επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{με} \quad u = u(z, t). \quad (8.1.1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους z είναι το βάθος μέσα στο στρώμα της αργίλου (η χωρική μεταβλητή) και t ο χρόνος (η χρονική μεταβλητή). Επίσης $u = u(z, t)$ η άγνωστη συνάρτηση που εκφράζει την **πρόσθετη υδροστατική πίεση** (ή **υπερπίεση του νερού των πόρων**). Τέλος c_v είναι ο **συντελεστής στερεοποίησης**. Αυτός είναι μια θετική σταθερά που υπολογίζεται από τη σχέση (2.1.55) με τη βοήθεια τριών άλλων σταθερών: δύο του εδάφους και μιας του νερού.

Στόχος μας σ' αυτό εδώ το κεφάλαιο είναι απλά η επίλυση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους στο συγκεκριμένο πρόβλημα της μονοδιάστατης στερεοποίησης στρώματος αργίλου σταθερού πάχους d (με $0 \leq z \leq d$) και ακριβέστερα οριζόντιου, ομογενούς και ισότροπου, πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου στρώματος αργίλου (Σχήμα Β8.1).



Σχήμα Β8.1: Ημιπεριορισμένο (ημίκλειστο) στρώμα αργίλου στο έδαφος σταθερού πάχους d ($0 \leq z \leq d$). Στο επάνω σύνορό του $z = 0$ υπάρχει (αμέσως πιο πάνω) διαπερατό έδαφος, ενώ στο κάτω σύνορό του $z = d$ υπάρχει (αμέσως πιο κάτω) αδιαπέρατο έδαφος. Αντίστοιχο είναι βέβαια και το ανοικτό στρώμα (ή στρώση) αργίλου: εκεί και τα δύο όρια $z = 0$ και $z = d$ του στρώματος είναι προς διαπερατό έδαφος.

Υποθέτουμε ότι $z = 0$ στο πάνω όριο του στρώματος της αργίλου και $z = d$ στο κάτω όριο. Υποθέτουμε επίσης ότι το πάνω όριο $z = 0$ του στρώματος της αργίλου είναι το σύνορό του με διαπερατό έδαφος (πάνω από το στρώμα της αργίλου), δηλαδή με έδαφος διά μέσου του οποίου μπορεί εύκολα να περάσει το νερό (π.χ. άμμο). Επίσης ότι το κάτω όριο $z = d$ του στρώματος της αργίλου είναι το σύνορό του (κάτω από το στρώμα της αργίλου) με αδιαπέρατο έδαφος, δηλαδή με έδαφος όπου δε μπορεί καθόλου να περάσει το νερό. Ένα τέτοιο στρώμα αργίλου καλείται συχνά **ημιπεριορισμένο στρώμα αργίλου** (ή **ημίκλειστο στρώμα αργίλου**) και αποδεικνύεται στην Εδαφομηχανική ότι σ' αυτό πρέπει να ισχύουν για φυσικούς λόγους οι δύο συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial z}(d, t) = 0. \quad (8.1.2)$$

Επιπλέον τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρούμε την αρχική συνθήκη

$$u(z, 0) = u_i(z) \quad (8.1.3)$$

με τη συνάρτηση $u_i(z)$ γνωστή. Πολύ συχνά μάλιστα τη θεωρούμε ίση με σταθερά: $u_i(z) = u_{i0}$.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές μας είναι το βάθος z (με $0 \leq z \leq d$) κι ο χρόνος t (με $t \geq 0$). Έχουμε λοιπόν να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), δηλαδή τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, με τις συνοριακές συνθήκες (8.1.2) (δύο συνθήκες: σωστά, αφού έχουμε δεύτερη χωρική παράγωγο: ως προς το βάθος z) και την αρχική συνθήκη (8.1.3) (μία συνθήκη: πάλι σωστά, αφού έχουμε πρώτη χρονική παράγωγο: ως προς το χρόνο t). Για την επίλυση αυτού του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών θα χρησιμοποιήσουμε βέβαια τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ακριβώς όπως την αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο Β5. Και μάλιστα την εφαρμόσαμε ήδη στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως στην Ενότητα Β5.3.

Μόνο που ... Μόνο που εκεί είχαμε τις κάπως πιο απλές συνοριακές συνθήκες (5.3.3): $u(0, t) = u(L, t) = 0$, ενώ εδώ έχουμε τις λίγο δυσκολότερες συνοριακές συνθήκες (8.1.2). Και λέμε λίγο δυσκολότερες, απλά επειδή η δεύτερη από αυτές (στο κάτω όριο $z = d$ του στρώματος της αργίλου) έχει την πρώτη χωρική παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως $u(z, t)$. Αν βέβαια το στρώμα της αργίλου συνόρευε στο κάτω όριό του $z = d$ με διαπερατό στρώμα εδάφους (όπως συμβαίνει στο πάνω όριό του $z = 0$), ε τότε το παρόν πρόβλημα στερεοποιήσεως ουσιαστικά θα ταυτιζόταν με το πρόβλημα της Ενότητας Β5.3 που αφορούσε στη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε τοίχο. Εδώ όμως το πρόβλημα είναι λιγάκι πιο δύσκολο. Επιπλέον δε θέλουμε να το αναγάγουμε στο πρόβλημα της Ενότητας Β5.3 (αν και πρέπει να ομολογήσουμε πως η αναγωγή αυτή γίνεται συχνά στην Εδαφομηχανική), ώστε να εξασκηθούμε και με πιο δύσκολες συνοριακές συνθήκες: εδώ διαπερατού ορίου για $z = 0$ και αντίθετα αδιαπέρατου ορίου για $z = d$. Ξεκινάμε!

Β8.1.2. Επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών

Ακριβώς όπως και στην Παράγραφο Β5.3.2, έτσι κι εδώ χωρίζουμε τη χωρική μεταβλητή z (το βάθος στο στρώμα της αργίλου) από τη χρονική μεταβλητή t (το χρόνο) υποθέτοντας ότι

$$u(z, t) = Z(z)T(t), \quad \text{οπότε προφανώς} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Z''(z)T(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Z(z)\dot{T}(t). \quad (8.1.4)$$

Άρα η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (8.1.1) που έχουμε παίρνει έτσι τη μορφή

$$Z''(z)T(t) = \frac{1}{c_v} Z(z)\dot{T}(t) \implies \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c_v} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda = -p^2 \quad (8.1.5)$$

έχοντας υποθέσει πως $u(z, t) = Z(z)T(t) \neq 0$ και επίσης ότι η σταθερά διαχωρισμού λ είναι αρνητική: $\lambda = -p^2 < 0$ (με $p > 0$). Αυτό μας εξασφαλίζει, όπως και στην Ενότητα Β5.3, τριγωνομετρική χωρική λύση $Z(z)$ άρα και τη δυνατότητα πληρώσεως και των δύο συνοριακών συνθηκών (8.1.2).

Με βάση τον αμέσως πιο πάνω χωρισμό των δύο μεταβλητών z (χωρική μεταβλητή: βάθος) και t (χρονική μεταβλητή: χρόνος) καταλήγουμε άμεσα στις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$Z''(z) + p^2 Z(z) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{T}(t) + p^2 c_v T(t) = 0. \quad (8.1.6)$$

Με κλασική εκθετική αντικατάσταση, εδώ $Z_0(z) = e^{\mu z}$, από την πρώτη εξίσωση $Z''(z) + p^2 Z(z) = 0$ βρίσκουμε πολύ εύκολα την τόσο γνωστή μας τριγωνομετρική λύση αυτής της εξισώσεως

$$Z(z) = A \cos pz + B \sin pz. \quad (8.1.7)$$

Αυτή συμπίπτει ουσιαστικά με την αντίστοιχη λύση (5.3.13) της Παραγράφου Β5.3.3. Επίσης από την πρώτη συνοριακή συνθήκη (8.1.2), τη συνθήκη $u(0, t) = 0$, οπότε αναγκαστικά και $Z(0) = 0$, η γενική λύση (8.1.7) δίνει αμέσως $A = 0$ (αφού $\cos 0 = 1$ και $\sin 0 = 0$) και απλοποιείται στη μορφή

$$Z(z) = B \sin pz. \quad (8.1.8)$$

Όμως στο σημείο αυτό τα πράγματα δυσκολεύουν λιγάκι. Αυτό συμβαίνει απλά για το λόγο ότι η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (8.1.2), η συνθήκη με την παράγωγο: $(\partial u / \partial z)(d, t) = 0$, απαιτεί (με βάση το χωρισμό των μεταβλητών $u(z, t) = Z(z)T(t)$ που έχουμε υποθέσει) να έχουμε $Z'(d) = 0$, αφού $(\partial u / \partial z)(z, t) = Z'(z)T(t)$. Παραγωγίζοντας λοιπόν την πιο πάνω λύση (8.1.8), προκύπτει

$$Z'(z) = Bp \cos pz, \quad \text{οπότε} \quad Z'(d) = 0 \implies \cos pd = 0 \quad \text{με} \quad p > 0, \quad (8.1.9)$$

εφόσον βέβαια $B \neq 0$, δηλαδή δεν έχουμε την τετριμμένη μηδενική λύση $Z(z) = 0$. Άρα παίρνουμε τις ιδιοτιμές p_n :

$$p_n d = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.10)$$

και τις αντίστοιχες χωρικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$:

$$Z_n(z) = \sin p_n z = \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2d} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.11)$$

για τη χωρική συνάρτηση $Z(z)$, όπου πήραμε τη σταθερά B (εδώ καλύτερα B_n) ίση με τη μονάδα.

Με αυτές τις ιδιοτιμές p_n η πιο πάνω χρονική διαφορική εξίσωση $\dot{T}(t) + p^2 c_v T(t) = 0$, η δεύτερη εξίσωση (8.1.6), παίρνει την τελική της μορφή για τις άγνωστες χρονικές ιδιοσυναρτήσεις $T_n(t)$

$$\dot{T}_n(t) + p_n^2 c_v T_n(t) = 0 \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.12)$$

Πάλι με κλασική εκθετική αντικατάσταση $T_{n0}(t) = e^{\mu t}$ προκύπτει πολύ εύκολα η γενική λύση της

$$T_n(t) = C_n e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.13)$$

Επομένως σύμφωνα με το χωρισμό των μεταβλητών $u(z, t) = Z(z)T(t)$ και τώρα $u_n(z, t) = Z_n(z)T_n(t)$ οι ιδιοσυναρτήσεις $u_n(z, t)$ στο παρόν πρόβλημα στερεοποίησης ενός στρώματος (ή ισοδύναμα μιας στρώσεως) αργίλου θα έχουν τις εξής μορφές:

$$u_n(z, t) = Z_n(z)T_n(t) = C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.14)$$

Παίρνοντας τώρα τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u_n(z, t)}{\partial z^2} = -p_n^2 C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_n(z, t)}{\partial t} = -p_n^2 c_v C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t}, \quad (8.1.15)$$

διαπιστώνουμε άμεσα, καλύτερα επαληθεύουμε, ότι πληρούται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), δηλαδή η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, εδώ στο φαινόμενο της στερεοποίησης στρώματος (ή στρώσεως) αργίλου στο έδαφος, αφού από τις πιο πάνω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 u_n(z, t)}{\partial z^2} = -p_n^2 C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u_n(z, t)}{\partial t}. \quad (8.1.16)$$

Επίσης διαπιστώνουμε εύκολα, επαληθεύουμε, πάλι από τις σχέσεις (8.1.14) και ότι

$$u_n(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_n}{\partial z}(d, t) = 0. \quad (8.1.17)$$

Άρα πληρούνται κι οι δύο συνοριακές συνθήκες στο πάνω και στο κάτω όριο του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου με το πάνω όριο $z = 0$ διαπερατό, ενώ με το κάτω όριο $z = d$ αδιαπέρατο.

Υπό αυτές τις συνθήκες παίρνουμε (σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Β5) σαν γενική λύση $u(z, t)$ του παρόντος προβλήματος στερεοποίησης τη σειρά των ιδιοσυναρτήσεων

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}. \quad (8.1.18)$$

Το μόνο που μας απομένει στο σημείο αυτό είναι ο προσδιορισμός των σταθερών C_n στη λύση μας αυτή. Βέβαια αυτός θα γίνει με χρήση της αρχικής συνθήκης (8.1.3), δηλαδή της συνθήκης $u(z, 0) = u_i(z)$ (για $t = 0$ και με τη $u_i(z)$ μια γνωστή συνάρτηση) που προς το παρόν την έχουμε αγνοήσει. Πραγματικά, θέτοντας $t = 0$ στη λύση (8.1.18), προκύπτει από την αρχική αυτή συνθήκη

$$u(z, 0) = u_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n z \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad \text{αφού} \quad e^0 = 1. \quad (8.1.19)$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται απλά για ανάπτυγμα της αρχικής πρόσθετης υδροστατικής πίεσεως (ή υπερπίεσεως του νερού των πόρων) $u_i(z)$ στις χωρικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z) = \sin p_n z$ που ήδη βρήκαμε. Η μόνη, αλλ' όχι σημαντική, δυσκολία είναι ότι εδώ δεν έχουμε κλασική ημιτονική σειρά Fourier, αλλά γενικευμένη σειρά Fourier λόγω των εκφράσεων $p_n = (2n-1)\pi/(2d)$ των ιδιοτιμών p_n .

Δεν είναι δα και τόσο δύσκολα τα πράγματα! Πρώτα-πρώτα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις μας $Z_n(z) = \sin p_n z$ (με $n = 1, 2, \dots$) στις σχέσεις (8.1.11) αποτελούν σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων στο διάστημα $[0, d]$, δηλαδή στο διάστημα του βάθους z του στρώματος της αργίλου που εξετάζουμε. Επομένως ισχύουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^d Z_m(z) Z_n(z) dz = \int_0^d \sin \frac{(2m-1)\pi z}{2d} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2d} dz = 0, \quad \text{εάν} \quad m \neq n. \quad (8.1.20)$$

Σημειώνουμε παρενθετικά ότι εντελώς ανάλογα ισχύουν, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο Β6.1.9 του Κεφαλαίου Β6, για τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ σε ράβδο με στήριξη αριστερά και ελεύθερη δεξιά. Μόνο που εκεί γράφαμε x αντί για z και επίσης L αντί για d . Καμία άλλη διαφορά στις χωρικές ιδιοσυναρτήσεις. Σαν το διαπερατό σύνορο $z = 0$ στη στερεοποίηση στρώματος αργίλου να είναι στήριξη σε ράβδο και το αδιαπέρατο σύνορο $z = d$ να είναι ελεύθερο άκρο ράβδου. Μην παίρνουν όμως πολύ αέρα τα μυαλά μας, γιατί στην Ενότητα Β6.1 του Κεφαλαίου Β6 ίσχυε για τις ιδιοταλαντώσεις ράβδων η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, ενώ εδώ στη στερεοποίηση στρώματος αργίλου ισχύει η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Και όμως οι χωρικές ιδιοσυναρτήσεις τους, $X_n(x)$ και $Z_n(z)$ αντίστοιχα, είναι απόλυτα ανάλογες! Ακόμη μεγαλύτερη είναι η αναλογία με το πρόβλημα της μονοδιάστατης μεταδόσεως θερμότητας σε τοίχο (ή σε ράβδο) με το αριστερό σύνορό του σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ το δεξιό σε πλήρη μόνωση.

Συμπληρώνουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (8.1.20) με την ειδική περίπτωση όπου $m = n$. Τότε βέβαια το δεξιό μέλος δεν είναι μηδέν. Δε νοείται ορθογωνιότητα μιας συναρτήσεως $Z_n(z)$ με τον εαυτό της ... Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις

$$N_n := \int_0^d Z_n^2(z) dz = \int_0^d \sin^2 \frac{(2n-1)\pi z}{2d} dz = \frac{d}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.21)$$

για τις σχετικές **νόρμες** N_n . Τόσο απλό το αποτέλεσμα! Με τις νόρμες αυτές $N_n = d/2$ γνωστές το ανάπτυγμα της γνωστής συναρτήσεως $u_i(z)$ στις ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$, ώστε να πληρούται η αρχική συνθήκη (8.1.3) που μας έχει απομείνει, είναι πια παιχνιδάκι. Η σχετική θεωρία έχει αναπτυχθεί στο Εδάφιο Β6.2.6.4 του Κεφαλαίου Β6. Με βάση τη θεωρία αυτή και το σχετικό τύπο (6.2.135) στο παρόν πρόβλημα προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις των συντελεστών C_n της γενικευμένης ημιτονικής σειράς Fourier (8.1.19) για την αρχική και γνωστή συνάρτηση $u_i(z)$:

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_0^d u_i(z) Z_n(z) dz = \frac{2}{d} \int_0^d u_i(z) \sin p_n z dz \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1.22)$$

αφού $N_n = d/2$ και $Z_n(z) = \sin p_n z$. Και στο κάτω-κάτω της γραφής ο τύπος αυτός είναι απόλυτα ανάλογος με τον αντίστοιχο τύπο για την κλασική ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα $[0, d]$ που έχει την ίδια ακριβώς μορφή, αλλ' απλά με λίγο διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z) = \sin(n\pi z/d)$.

Συνοψίζουμε: η λύση $u(z, t)$ του προβλήματος στερεοποίησης ημιπεριορισμένου (ή ημίκλειστου) στρώματος αργίλου δίνεται από τον τύπο (8.1.18) με τις σταθερές C_n σ' αυτόν να προσδιορίζονται από τις σχέσεις (8.1.22) με ολοκληρώσεις και με βάση την αρχική συνθήκη $u(z, 0) = u_i(z)$.

Β8.1.3. Μια πιο εύχρηστη μορφή της λύσεως

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση για την απλοποίηση της λύσεως $u(z, t)$ πολύ συχνά εισάγεται σ' αυτήν τη φάση στην Εδαφομηχανική ο **παράγοντας χρόνου** (ή **χρονικός παράγοντας**) T_v (που είναι μια αδιάστατη ποσότητα), οι σταθερές M_n (ή απλούστερα M) και το αδιάστατο βάθος z_r (ή απλούστερα Z χωρίς όμως να γίνεται σύγχυση με τη συνάρτηση $Z = Z(z)$) με βάση τους τύπους

$$T_v = \frac{c_v t}{d^2}, \quad M_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad z_r = \frac{z}{d}. \quad (8.1.23)$$

Τότε η πιο πάνω λύση (8.1.18) παίρνει την ακόμη πιο απλή μορφή της

$$u(z, t) \equiv u^*(z_r, T_v) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin M_n z_r e^{-M_n^2 T_v}. \quad (8.1.24)$$

(Στην Εδαφομηχανική η σειρά αυτή γράφεται συχνά από $n = 0$ έως $n = \infty$ με $M_n = (2n+1)\pi/2$.)

Για μια σταθερή τιμή του παράγοντα χρόνου T_v η σχετική καμπύλη $u^*(z_r, T_v)$, που είναι τώρα συνάρτηση μόνο του αδιάστατου βάθους z_r , καλείται **ισόχρονη καμπύλη** και μπορούμε να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα πολλές ισόχρονες καμπύλες. Αυτές μας δίνουν μια θαυμάσια εικόνα του πώς ακριβώς εξελίσσεται το φαινόμενο της στερεοποίησης στο στρώμα της αργίλου που μελετάμε.

Β8.1.4. Σταθερή αρχική πρόσθετη υδροστατική πίεση (ή υπερπίεση του νερού των πόρων)

Αρκετά συχνά (αλλ' όχι πάντοτε) υποθέτουμε στη στερεοποίηση τη γνωστή αρχική συνάρτηση $u_i(z)$ της πρόσθετης υδροστατικής πίεσεως (ή υπερπίεσεως του νερού των πόρων) σαν σταθερή συνάρτηση u_{i0} , δηλαδή $u_i(z) = u_{i0}$. Τότε οι πιο πάνω συντελεστές C_n υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με τους εξής κλειστούς τύπους που προκύπτουν πολύ εύκολα από τις σχετικές ολοκληρώσεις:

$$C_n = \frac{4u_{i0}}{(2n-1)\pi} = \frac{2u_{i0}}{M_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.25)$$

Η λύση μας $u(z, t)$ (η πρόσθετη υδροστατική πίεση ή υπερπίεση του νερού των πόρων) συνεχίζει βέβαια να δίνεται από τη σχέση (8.1.18) ή την πιο σύντομη σχέση (8.1.24), η οποία χρησιμοποιεί τα αδιάστατα μεγέθη T_v (παράγοντας χρόνου), $M_n = (2n-1)\pi/2$ και $z_r = z/d$ των σχέσεων (8.1.23).

B8.1.5. Βαθμός στερεοποίησης του στρώματος αργίλου

Στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου που έχουμε σταθερή αρχική πρόσθετη υδροστατική πίεση $u(z, 0) = u_{i0}$ ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο φαινόμενο της στερεοποίησης του στρώματος αργίλου που εξετάζουμε παρουσιάζει ο καλούμενος **βαθμός στερεοποίησης** $U(z, t)$. Αυτός είναι συνάρτηση τόσο του βάθους z όσο και του χρόνου t και υπολογίζεται τελικά με βάση τον τύπο

$$U(z, t) = \frac{u_{i0} - u(z, t)}{u_{i0}} = 1 - \frac{u(z, t)}{u_{i0}}. \quad (8.1.26)$$

Η συνάρτηση $u(z, t)$ δίνεται από τη σχέση (8.1.18) εδώ (δηλαδή για $u(z, 0) = u_{i0}$) με τους συντελεστές C_n σ' αυτήν να υπολογίζονται από τις σχέσεις (8.1.25). Η μέση τιμή $\bar{U}(t)$ του συντελεστή στερεοποίησης $U(z, t)$ στο πάχος του στρώματος αργίλου καλείται **μέσος βαθμός στερεοποίησης**.

B8.2. ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΑΡΓΙΛΟΥ

Πρόκειται για ένα επίσης πολύ γνωστό πρόβλημα στερεοποίησης με μόνη διαφορά από το πρόβλημα της προηγούμενης ενότητας ότι τώρα και στα δύο σύνορα (και το πάνω και το κάτω) του στρώματος της αργίλου υπάρχει διαπερατό έδαφος. Επομένως ισχύει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), η πρώτη συνοριακή συνθήκη (8.1.2) και η αρχική συνθήκη (8.1.3). Αλλάζει μονάχα η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (8.1.2) που παίρνει τη μορφή $u(d, t) = 0$. (Συνήθως μάλιστα στο πρόβλημα αυτό της Εδαφομηχανικής αντίθετα με εδώ το πάχος του στρώματος της αργίλου δηλώνεται με $2d$ αντί για d . Έτσι πετυχαίνεται η αναγωγή της λύσεως του προβλήματος του ημιπεριορισμένου ή ημίκλειστου στρώματος της προηγούμενης Ενότητας Β8.1 στο πρόβλημα του ανοικτού στρώματος.) Άρα τώρα οι δύο συνοριακές συνθήκες μας (8.1.2) παίρνουν τις μορφές

$$u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(d, t) = 0. \quad (8.2.1)$$

Για την επίλυση και του δεύτερου αυτού προβλήματος ισχύουν και πάλι ο χωρισμός των μεταβλητών (8.1.4), οι δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (8.1.6) και η γενική λύση (8.1.7) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Και πάλι παίρνουμε τη μορφή (8.1.8) της λύσεως αυτής $Z(z)$ με την πρώτη συνοριακή συνθήκη $u(0, t) = 0$ που δίνει $Z(0) = 0$. Από τη δεύτερη όμως συνοριακή συνθήκη $u(d, t) = 0$ (στο κάτω όριο του στρώματος αργίλου), που δίνει τώρα $Z(d) = 0$, προκύπτει

$$Z(z) = B \sin pz \quad \implies \quad Z(d) = B \sin pd = 0. \quad (8.2.2)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές p_n στο παρόν πρόβλημα στερεοποίησης στρώματος αργίλου είναι οι εξής:

$$p_n d = n\pi \quad \implies \quad p_n = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.3)$$

Άρα οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ ως προς το βάθος z του στρώματος θα έχουν τη μορφή

$$Z_n(z) = \sin p_n z = \sin \frac{n\pi z}{d} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.4)$$

Αυτές είναι φυσικά διαφορετικές από τις ιδιοσυναρτήσεις (8.1.11) στο προηγούμενο πρόβλημα του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου του Σχήματος Β8.1, ενώ εδώ έχουμε ανοικτό στρώμα.

Τώρα παραπέρα η χρονική διαφορική εξίσωση, η δεύτερη εξίσωση (8.1.6) και επίσης τελικά η εξίσωση (8.1.12), έχει πάλι τη λύση (8.1.13), αλλ' εδώ με $p_n = n\pi/d$, όπως ήδη αναφέρθηκε. Η άγνωστη συνάρτηση $u(z, t)$ έχει επομένως κι αυτή ξανά τη μορφή (8.1.18), αλλά με $p_n = n\pi/d$. Στο παρόν πρόβλημα πρόκειται όμως για συνήθη απλή ημιτονική σειρά Fourier. Επομένως οι συντελεστές της C_n θα δίνονται και πάλι από τους τύπους (8.1.22) (εδώ επαναλαμβάνεται με $p_n = n\pi/d$). Τώρα όμως οι τύποι αυτοί είναι οι κλασικοί τύποι για τους συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier. Η τελική δυνατότητα χρήσεως του παράγοντα χρόνου T_n , των σταθερών M_n και του αδιάστατου βάθους z^* είναι και αυτή εφαρμόσιμη (βέβαια με τις κατάλληλες τροποποιήσεις).